Produits semi-directs

Exercice 1 (Produit semi-direct, cf. Perrin p. 22)**.** Soient N et H deux groupes et soit $\phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ un morphisme. Montrer que $\cdot_\phi$ définit bien une loi de groupe sur $N \times H$, où :

$$\forall n_1, n_2 \in N, \forall h_1, h_2 \in H, \qquad (n_1, h_1) \cdot_\phi (n_2, h_2) := (n_1 (\phi(h_1)(n_2)), h_1 h_2).$$

Ne pas oublier l'associativité. Quel est le neutre pour cette loi ? Quel est l'inverse de (n, h) ?

Exercice 2 (Produit ~~semi-~~direct, cf. Perrin p. 23)**.** Soient N et H deux groupes et soit $\phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ telle que $\forall h \in H\ \phi(h) = \mathrm{Id}$, montrer que $N \rtimes_\phi H \simeq N \times H$.

Exercice 3 (Produit ~~semi-~~direct 2)**.** Soient N et H deux groupes et soit $G = N \rtimes H$. Montrer que si G est abélien alors $G = N \times H$.

Exercice 4 (Groupes de cardinal 6)**.** Montrer que $\mathfrak{S}_3 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrer que $\mathfrak{S}_3$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sont les seuls groupes de cardinal 6.

Exercice 5 (Groupes symétriques, cf. Perrin p. 23)**.** Montrer que $\mathfrak{S}_n \simeq \mathfrak{A}_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le produit est-il direct ?

Exercice 6 (Groupes diédraux, cf. Perrin p. 23)**.** Soit D_n le groupe diédral d'ordre n, c'est-à-dire le groupe des isométries d'un n-gone régulier du plan. Montrer que $D_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le produit est-il direct ?

Exercice 7. Montrer qu'il existe au moins trois produits semi-directs $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ non isomorphes.

Exercice 8 (Wait a minute)**.** Dans les exercices 4 et 6 on n'a pas précisé par quel morphisme était définie la structure de produit semi-direct. Pourquoi ? Dans ces exercices, les isomorphismes sont-ils canoniques ? Qu'en est-il dans l'exercice 5 ?

Exercice 9 (Un contre-exemple)**.** Montrer que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ne s'écrit pas comme un produit semi-direct non trivial.

Définition (cf. Perrin p. 13)**.** Le *groupe de quaternions*, noté H_8 est le groupe de cardinal 8 dont les éléments sont notés ± 1, $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$ et dont la loi est définie par la règle usuelle pour les signes et :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \qquad ij = -\,ji = k, \qquad jk = -kj = i, \qquad \text{et} \qquad ki = -ik = j.$$

Exercice 10 (And again, cf. Perrin p. 24)**.** Montrer que ni $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, ni H_8 ne s'écrivent comme des produits semi-directs non triviaux.

Remarque. L'exercice 11 ci-dessous est plus difficile et constitue un développement classique. La solution est détaillée dans Perrin pp. 27–28. La preuve utilise les théorèmes de Sylow (Perrin sect. I.5) et une partie de la description des automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (Perrin sect. I.7). Ces deux points sont aussi souvent proposés en développement.

Exercice 11 (Groupes de cardinal pq, cf. Perrin pp. 27–28)**.** Déterminer les groupes de cardinal pq avec p, q premiers et $p < q$. En particulier, pour $p = 2$ et $q \geqslant 3$ montrer qu'il n'y a que $\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$ et D_q.