Actions de groupes

Exercice 1. Soit $G \curvearrowright X$ une action de groupe. Une partie $A \subset X$ est dite *stable* sous l'action de G si pour tout $g \in G$ on a $g \cdot A \subset A$. Montrer que A est stable sous l'action de G si et seulement si A est réunion d'orbites.

Exercice 2 (Centre d'un p-groupe, Perrin p. 16)**.** Soient p premier et $n \in \mathbb{N}^*$, soit G un groupe de cardinal p^n, montrer que le centre de G est non trivial.

Exercice 3 (Fresnel p. 3)**.** Soit G un groupe commutatif qui agit fidèlement et transitivement sur un ensemble X. Montrer que l'action $G \curvearrowright X$ est simplement transitive.

Exercice 4 (Groupe symétrique)**.**

1. Démontrer que l'action tautologique $\mathfrak{S}_n \curvearrowright [\![1, n]\!]$ est n-transitive.
2. Démontrer que l'action tautologique $\mathfrak{A}_n \curvearrowright [\![1, n]\!]$ est $(n-2)$-transitive, mais pas $(n-1)$-transitive.
3. Que dire d'une action $(n-1)$-transitive sur $[\![1, n]\!]$?

Exercice 5 (Un exemple de fidélisation)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps, on considère l'action naturelle de $GL_{n+1}(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{K}^{n+1}$.

1. Déterminer le noyau de cette action.
2. En déduire que $PGL_n(\mathbb{K}) := GL_{n+1}(\mathbb{K})/\{\lambda \operatorname{Id} \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\}$ agit fidèlement sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.
3. Dans le cas $n = 1$, montrer que l'action est 2-transitive et déterminer le stabilisateur de $(\mathbb{K} \times \{0\}, \{0\} \times \mathbb{K})$.
4. Toujours pour $n = 1$, montrer que l'action est 3-transitive. Est-elle k-transitive pour $k > 3$?
5. Qu'en est-il pour $n \geqslant 2$?

Exercice 6 (Action diagonale)**.** Soient $G \curvearrowright X$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *action diagonale* de G sur X^n l'action définie par :

$$\forall g \in G,\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in X^n, \quad g \cdot (x_1, \dots, x_n) := (g \cdot x_1, \dots, g \cdot x_n).$$

1. À quelle condition l'action diagonale $G \curvearrowright X^n$ est-elle transitive ?
2. On note $X^{(n)} := \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}$. Montrer que l'action diagonale stabilise $X^{(n)}$.
3. À quelle condition l'action restreinte $G \curvearrowright X^{(n)}$ est-elle transitive (resp. simplement transitive) ?