Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Exercice 1 (Définitions, Lafontaine sect. I.D)**.** Redémontrer l'équivalence entre les quatre caractérisations locales de sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^n$. Plus précisément, soient $M \subset \mathbb{R}^n$, $m \in \{0, \ldots, n\}$ et $p \in M$, montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

1. Redressement local : il existe U voisinage ouvert de p dans $\mathbb{R}^n$, V voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $f : U \to V$ tel que $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$.
2. Zéros d'une submersion : il existe U voisinage ouvert de p dans $\mathbb{R}^n$ et une submersion $g : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ telle que $U \cap M = g^{-1}(0)$.
3. Image d'un plongement : il existe U voisinage ouvert de p dans $\mathbb{R}^n$, un ouvert Ω de $\mathbb{R}^m$ et une immersion $h : \Omega \to U$ telle que h soit un homéomorphisme de Ω sur $U \cap M$.
4. Graphe : quitte à permuter les coordonnées, il existe un voisinage U de p dans $\mathbb{R}^n$, un ouvert V de $\mathbb{R}^m$ contenant $(p_1, \ldots, p_m)$ et une application $F : V \to \mathbb{R}^{n-m}$ telle que $U \cap M$ soit le graphe de F.

Exercice 2 (Espaces tangents, Laudenbach sect. III.2)**.** Soient M une sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^n$ et $p \in M$. Pour chacune des caractérisations locales de l'exercice précédent, décrire l'espace tangent T_pM.

Exercice 3 (La sphère)**.** Montrer quatre fois que la sphère euclidienne $\mathbb{S}^n$ est une hypersurface de $\mathbb{R}^{n+1}$, en utilisant les différentes caractérisations locales.

Exercice 4 (Sous-variétés produits)**.** Soient M une sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^p$ et N une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^q$, montrer que $M \times N$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{p+q}$. De quelle dimension ? Décrire ses espaces tangents.

Exercice 5 (Les tores)**.** Montrer que le tore $\mathbb{T}^n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_i| = 1\}$ est une sous-variété (réelle) de $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ et décrire ses espaces tangents.

Exercice 6 (Groupes de Lie)**.** Montrer que les ensembles suivants sont des sous-variétés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner leur dimension. Décrire leurs espaces tangents.
Indication : pour le dernier point on pourra commencer par décrire le tangent en I_n et en déduire le tangent en un point quelconque.

1. $GL_n(\mathbb{R})$,
2. $SL_n(\mathbb{R})$,
3. $O_n(\mathbb{R})$,
4. $SO_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7 (Cubique cuspidale, Lafontaine sect. I.D)**.**

1. Soient M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ la projection sur les p premières coordonnées, $p(M)$ est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^p$?
2. Montrer que $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = z^2, y = z^3\right\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
3. L'ensemble $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^3 = y^2\right\}$ est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?
   Indication : quelle peut être la valeur d'un vecteur tangent en $(0, 0)$?

Exercice 8. Montrer que l'exponentielle de matrice est lisse de l'espace des matrices antisymétriques vers $SO_n(\mathbb{R})$, calculer sa différentielle.

Exercice 9 (Coordonnées sphèriques)**.** Soient $\mathbb{T}^2 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 = z^2 + t^2\right\}$ et $F : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^2$ définie par

$$F(x, y, z, t) = (xz, yz, t).$$

1. Montrer que F est bien définie et lisse.
2. Calculer sa différentielle en tout point et déterminer ses points critiques.
3. Entre quels domaines F réalise-t-elle un difféomorphisme local ? Un difféomorphisme global ?
4. Pourquoi ce titre d'exercice ?

Exercice 10 (Transversalité, Laudenbach sect. III.2.8)**.** On dit que deux sous-variétés M et N de $\mathbb{R}^n$ s'intersectent *transversalement* en $p \in M \cap N$ si $\mathbb{R}^n = T_pM + T_pN$. On dit qu'elles s'intersectent transversalement si c'est valable pour tout $p \in M \cap N$.

1. Soient M et N deux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ qui s'intersectent transversalement, montrer $M \cap N$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.
2. Décrire ses espaces tangents en fonctions de ceux de M et N.
3. Donner sa dimension en fonction de $\dim(M)$ et $\dim(N)$.

Exercice 11 (Fenêtre de Viviani, Rouvière pp. 273–275)**.** Soient $\mathcal{C}$ le cylindre de $\mathbb{R}^3$ d'équation $(x-1)^2 + y^2 = 1$ et S_r la sphère de centre 0 et de rayon $r > 0$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ et S_r sont des hypersurfaces lisses de $\mathbb{R}^3$ et décrire leurs plans tangents.
2. Pour quelles valeurs de r l'intersection $\mathcal{C} \cap S_r = M_r$ est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^3$?
   Indication : utiliser l'exercice précédent.
3. M_2 est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 12 (Image d'une immersion injective, adapté de Lafontaine sect. II.E)**.** On dit qu'un application est *propre* lorsque l'image réciproque d'un compact (de l'ensemble d'arrivée, pas de l'ensemble image) est un compact.
On dit qu'une application lisse est un *plongement* si son image est une sous-variété et qu'elle réalise un difféomorphisme sur son image.

1. Soit $h : t \mapsto \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, t\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$ de $]-\infty; 1[$ dans $\mathbb{R}^2$. On note $C = h\left(]-\infty; 1[\right)$. L'application h est-elle une immersion injective ? Est-elle propre ? Est-ce que C est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?
2. Soit $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une immersion injective propre avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^m$, montrer que h est un plongement.
   Indication : pour $p \in h(\Omega)$, considérer un voisinage compact de p dans $\mathbb{R}^n$.
3. Soit $i :]-1; 1[\to \mathbb{R}$ l'inclusion canonique. Montrer que i est une immersion injective. Est-elle propre ? Est-ce un plongement ?
4. Soit $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une immersion injective avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^m$. On suppose que $h(\Omega)$ soit une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension m. Montrer que h est un plongement.

Exercice 13 (Extrema liés)**.** Déterminer le minimum et le maximum sur $\mathbb{S}^2$ de la fonction $(x, y, z) \mapsto x + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}z^3$. Même question avec $(x, y, z) \mapsto x + y^2 + z^3$.

Exercice 14 (And again, Laudenbach sect. III.4.9)**.** Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forme quadratique associée. On suppose q non dégénérée.

1. Montrer que la quadrique Q d'équation $q(x) = 1$ est une hypersurface lisse de $\mathbb{R}^n$.
2. Déterminer les points critiques de la norme euclidienne sur Q et les multiplicateurs de Lagrange associés.

Exercice 15 (Billard convexe compact, Rouvière, pp. 413–415)**.** Soit Γ une courbe fermée simple de $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui borde un convexe compact K (i.e. K est une variété $\mathcal{C}^1$ à bord, de dimension 2 connexe et compacte et $\Gamma = \partial K$). On note $f : \Gamma^3 \to \mathbb{R}$ la fonction qui a un triangle ABC inscrit dans Γ associe son périmètre.

1. Montrer que f admet un maximum, et qu'il est atteint pour A, B et C distincts.
2. Montrer que $\{(A, B, C) \in \Gamma^3 \mid A, B, C \text{ distincts}\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^6$ sur laquelle f est différentiable.
3. Montrer que si (A, B, C) est la maximum de f, alors le triangle ABC est une trajectoire de billard dans l'intérieur de Γ.
   Indication : utiliser le théorème des extrema liés.
4. Dans le cas où Γ est une ellipse, remarquer que ce résultat est une conséquence triviale du théorème des accroissements finis.

Exercice 16 (Topologie des sous-variétés)**.** 1. Montrer qu'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est localement connexe par arcs. En déduire qu'une sous-variété connexe est connexe par arcs.

2. Plus généralement, remarquer que si $\mathbb{R}^m$ est localement quelque chose, alors une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension m aussi ! (Pour la topologie induite évidemment.)
3. Il résulte de la définition qu'une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ est localement fermée (i.e. pour tout $p \in M$, il existe un voisinage U de p dans $\mathbb{R}^n$ tel que $U \cap M$ est un fermé de U). Montrer que c'est équivalent à dire que M est l'intersection de son adhérence et d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 17 (Mesure des sous-variétés, Lafontaine sect. I.F)**.** Montrer qu'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension strictement inférieure à n est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue.

Exercice 18 (Matrices de rang fixé, Rouvière, pp. 286–287)**.**

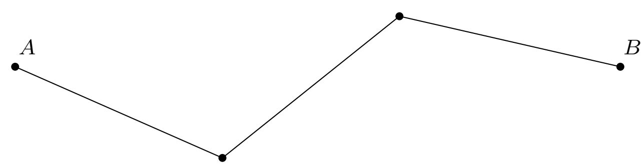
Soit V_r l'ensemble des matrices réelles de taille $m \times n$ de rang exactement r. On veut montrer que V_r est une sous-variété de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\{M \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) \mid \operatorname{rg}(M) \geqslant r\}$ est un ouvert.
2. Soit $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ par blocs où $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible. Montrer que $M \in V_r$ si et seulement si $D = CA^{-1}B$.
3. En déduire que V_r est une variété de dimension $(m + n - r)r$.

Exercice 19 (Points fixes d'involutions)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application lisse telle que $f \circ f = \mathrm{Id}$. On pose $\mathrm{Fix}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = x\}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{Fix}(f)$, $(d_x f)^2 = \mathrm{Id}$.
2. On suppose que $f(0) = 0$. On définit $h = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + d_0 f \circ f)$. Montrer que h est un difféomorphisme entre voisinages de 0. Montrer que $h \circ f = d_0 f \circ h$.
3. En déduire que $\mathrm{Fix}(f)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 20 (Espace des configurations d'un bras articulé)**.** On considère un mécanisme plan formé de trois tiges, de même longueur L, attachées par leurs extrémités comme sur la figure ci-dessous. On suppose les points A et B fixes et distants de $L(3 - \varepsilon)$ pour un certain $\varepsilon > 0$ petit. On note α, β et γ les angles entre chacune des tiges et l'horizontale (la droite (AB)) et on appelle espace des configurations de ce système l'ensemble C_ε des $(\alpha, \beta, \gamma) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[^3$ qui correspondent à des positions accessibles du système. Le but de l'exercice est de montrer que C_ε est difféomorphe à un cercle pour tout ε assez petit.



1. Montrer que $(\alpha, \beta, \gamma) \in C_\varepsilon$ si et seulement si

$$\begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0, \\ \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 3 - \varepsilon. \end{cases}$$

2. En déduire que C_ε est le graphe d'une fonction lisse au-dessus de

$$\Gamma_\varepsilon = \left\{ (\alpha, \beta) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[^2 \;\middle|\; F(\alpha, \beta) = 3 - \varepsilon \right\},$$

où $F(\alpha, \beta) = \cos\alpha + \cos\beta + \sqrt{1 - (\sin\alpha + \sin\beta)^2}$.

3. Montrer que F atteint un maximum en $(0, 0)$ et que sa hessienne y est définie négative.
4. Montrer que pour tout ε assez petit Γ_ε est difféomorphe à un cercle.
Indication : on pourra utiliser le lemme de Morse (Rouvière pp. 354–355).
5. Conclure que, pour tout ε assez petit, C_ε est difféomorphe à un cercle.

Remarque. Tiens ! Une application non triviale du lemme de Morse !

Exercice 21 (Racines simples de polynômes)**.**

1. Montrer que l'ensemble

$$\Sigma = \{(P, x) \in \mathbb{R}_d[X] \times \mathbb{R} \mid P(x) = 0\}$$

est une hypersurface de $\mathbb{R}_d[X] \times \mathbb{R}$ et décrire l'espace tangent $T_{(P,x)}\Sigma$.

2. Soit $(P, x) \in \Sigma$ tel que $P'(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe U et V, des voisinages ouverts de P et x respectivement, et $\varphi : U \to V$ lisse telle que $\varphi(P) = x$ et $Q(\varphi(Q)) = 0$ pour tout $Q \in U$. Calculer la différentielle de φ.
3. En déduire que, dans $\mathbb{R}_d[X]$, les racines simples d'un polynôme sont des fonctions lisses des coefficients.
4. Que se passe-t-il au niveau des racines multiples ?
5. Soient p_V et p_M les projections de Σ sur $\mathbb{R}_d[X]$ et $\mathbb{R}$. Montrer que p_M est une submersion.
6. Déterminer les points critiques de p_V, puis ses valeurs critiques.

Remarques. On peut remplacer l'espace $\mathbb{R}_d[X]$ par n'importe quel espace vectoriel V de dimension finie formé de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et qui vérifie la condition suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists f \in V$ telle que $f(x) \neq 0$.

Le théorème de Sard permet alors de montrer que pour presque tout $f \in V$ (pour la mesure de Lebesgue), le lieu des zéros de f est formé de points isolés.