Lien affine–projectif

Exercice 1. Soit U une carte affine d'un $\mathbb{K}$-espace projectif $\mathbb{P}(V)$ et soit $\overline{h} \in PGL(V)$. Montrer que $\overline{h}_{/U}$ est une homothétie ou une translation si et seulement si $\overline{h}$ fixe point par point l'hyperplan à l'infini $\mathbb{P}(V) \setminus U$.

Exercice 2. Soit U une carte affine d'un $\mathbb{K}$-espace projectif $\mathbb{P}(V)$ et soient P et Q deux sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$. À quelle condition les sous-espaces affines $P \cap U$ et $Q \cap U$ sont-ils parallèles ?

Exercice 3 (Une preuve absurde)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps de cardinal q. En itérant la décomposition $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$, montrer que $1 + q + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Exercice 4 (Théorème de Desargues projectif, Audin p. 186)**.** Soient ABC et $A'B'C$ deux vrais triangles sans sommet commun dans un plan projectif $\mathbb{P}(V)$. On suppose de plus que $(BC) \neq (B'C')$, $(AC) \neq (A'C')$ et $(AB) \neq (A'B')$. Notons α (resp. β, resp. γ) l'unique point de $(BC) \cap (B'C')$ (resp. $(AC) \cap (A'C')$, resp. $(AB) \cap (A'B')$). Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes si et seulement si les points α, β et γ sont alignés.

Exercice 5. Soit $\overline{h} \in PGL_2(\mathbb{K}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$. Dans ce qui suit, on identifie $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K} \sqcup \{\infty\}$ via $(x : y) \mapsto \frac{x}{y}$ dans les coordonnées homogènes associées au repère $(\infty, 0, 1)$.

1. Montrer que $\overline{h}$ a au plus deux points fixes.
2. Si $\overline{h}$ a un unique point fixe, montrer qu'elle est conjuguée par une homographie à une translation $x \mapsto x + u$ de la carte affine $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$.
3. Si $\overline{h}$ a exactement deux points fixes a et b, montrer qu'elle est conjuguée à $x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$. Montrer que de plus, $\forall x \in \mathbb{P}^1(K) \setminus \{a, b\}$, $[a, b, x, \overline{h}(x)] = \lambda$.

Exercice 6 (Démonstration projective de Pappus, Audin p. 208)**.** Démontrer le théorème de Pappus projectif sans utiliser la version affine de ce théorème.

Exercice 7 (Birapport et cocyclicité)**.** On se place dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ vu comme $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$. On appelle *cercle-droite* toute partie de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui est un cercle ou une droite affine réelle union $\{\infty\}$.

1. Soient a, b, c et $d \in \mathbb{C}$ distincts, montrer que ces points sont alignés ou cocycliques si et seulement si $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que l'image d'un cercle-droite par une homographie de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est encore un cercle-droite.

Exercice 8 (Lemme des trois birapports)**.**

1. Soient A, B, C, D et E cinq points distincts d'une droite projective. Montrer que $[B, C, D, E][C, A, D, E][A, B, D, E] = 1$.
2. Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan projectif et deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne passant pas par A, B ou C. On note α (resp. β, resp. γ) l'unique point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec (BC) (resp. (AC), resp. (AB)) et α' (resp. β', resp. γ') l'unique point d'intersection de $\mathcal{D}'$ avec (BC) (resp. (AC), resp. (AB)). Montrer que
$$[B, C, \alpha, \alpha'][C, A, \beta, \beta'][A, B, \gamma, \gamma'] = 1.$$
3. Réciproquement, soient A, B et C trois points non alignés d'un plan projectif, soient α, $\alpha' \in (BC)$, $\beta, \beta' \in (AC)$ et $\gamma, \gamma' \in (AB)$. Si α, β et γ sont alignés et
$$[B, C, \alpha, \alpha'][C, A, \beta, \beta'][A, B, \gamma, \gamma'] = 1,$$
montrer que α', β' et γ' sont alignés.
4. En déduire une nouvelle preuve du théorème de Menelaüs.