Birapport et coordonnées homogènes

Exercice 1. Soient $\mathbb{P}(V)$ et $\mathbb{P}(W)$ deux droites projectives et $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ injective et préservant le birapport. Montrer que f est une homographie.

Exercice 2. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites projectives sur $\mathbb{K}$, soient A, B, C et $D \in \mathcal{D}'$ et A', B', C' et $D' \in \mathcal{D}'$ tels que A, B et C sont distincts et A', B' et C' sont distincts. Montrer qu'il existe une unique homographie $h : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ telle que $h(A) = A'$, $h(B) = B'$, $h(C) = C'$ et $h(D) = D'$ si et seulement si $[A, B, C, D] = [A', B', C', D']$.

Exercice 3. Montrer que le birapport est un invariant total pour l'action de $PGL(V)$ sur l'ensemble des quadruplets de points distincts alignés de $\mathbb{P}(V)$.

Exercice 4 (Égalités de birapports, Fresnel p. 76)**.** Soient A, B, C, C', D et D' six points distincts d'une droite projective. Montrer que $[A, B, C, C'] = [A, B, D, D']$ si et seulement si $[A, B, C, D] = [A, B, C', D']$.

Exercice 5 (Audin p. 210)**.** Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites distinctes d'un plan projectif qui se coupent en A. Soient $B, C, D \in \mathcal{D}$ distincts et $B', C', D' \in \mathcal{D}'$ distincts. Montrer que (BB'), (CC') et (DD') sont concourantes si et seulement si $[A, B, C, D] = [A, B', C', D']$.

Exercice 6 (Involutions, Fresnel p. 76)**.** Soit $\mathcal{D}$ une droite projective, et h une homographie de $\mathcal{D}$ différente de Id. On note -1 pour $\Pi(-1, 1) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $h^2 = \mathrm{Id}$ si et seulement si il existe $M \in \mathcal{D}$ tel que $h(M) \neq M$ et $h^2(M) = M$.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.
   (a) h est une involution et a un point fixe.
   (b) h est une involution et a exactement deux points fixes.
   (c) h a exactement deux points fixes A et B et il existe $M \in \mathcal{D} \setminus \{A, B\}$ tel que $[A, B, M, h(M)] = -1$.
   (d) h a exactement deux points fixes A et B et pour tout $M \in \mathcal{D} \setminus \{A, B\}$ on a $[A, B, M, h(M)] = -1$.

Exercice 7 (Matrice d'une homographie)**.** Soient a, b et $c \in \mathbb{K}$ distincts et soit $\overline{h} \in PGL_2(\mathbb{K})$ l'unique homographie telle que $\overline{h}(a : 1) = (1 : 0)$, $\overline{h}(b : 1) = (0 : 1)$ et $\overline{h}(c : 1) = (1 : 1)$. Expliciter une matrice de $\overline{h}$ en fonction de a, b et c.

Exercice 8 (Permutations et birapport, Audin p. 199)**.** Soient $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ quatre points distincts d'une droite projective. L'action de $\mathfrak{S}_4$ sur $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ par permutation des indices induit une action de $\mathfrak{S}_4$ sur l'ensemble des valeurs que peut prendre le birapport des A_i. Déterminer l'orbite et le stabilisateur de $[A_1, A_2, A_3, A_4]$ pour cette action.

Exercice 9 (Audin p. 198)**.** Soient $A := (a_0 : a_1)$, $B := (b_0 : b_1)$, $C := (c_0 : c_1)$, $D := (d_0 : d_1)$ quatre points distincts de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$[A, B, C, D] = \frac{\det \begin{pmatrix} c_0 & a_0 \\ c_1 & a_1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{pmatrix}} \cdot \frac{\det \begin{pmatrix} d_0 & b_0 \\ d_1 & b_1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} d_0 & a_0 \\ d_1 & a_1 \end{pmatrix}}.$$

Exercice 10 (Un exercice pénible)**.** Vérifier par un calcul en coordonnées que si A, B, C et D sont quatre points distincts d'une droite projective $\mathbb{P}(V)$ et $f \in PGL(V)$ alors on a $[f(A), f(B), f(C), f(D)] = [A, B, C, D]$. Se convaincre que ce n'est pas la bonne méthode.