Homographies

Exercice 1. Soient f et g deux applications linéaires injectives de V dans W. Montrer que $\overline{f} = \overline{g}$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $f = \lambda g = g(\lambda \cdot)$.

Exercice 2 (Un grand classique de prépa révisité)**.** Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, quels sont les $f \in GL(V)$ tels que $\overline{f} = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}(V)}$. Montrer qu'on a une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \mathbb{K}^* \longrightarrow GL(V) \longrightarrow PGL(V) \longrightarrow 1 .$$

En déduire que $PGL(V) \simeq GL(V)/\mathbb{K}^*$. La suite exacte courte ci-dessus est-elle scindée ?

Exercice 3 (Audin p. 207)**.** Soit $f \in PGL(V)$ une homographie. Montrer que si $K = \mathbb{R}$ et $\dim(\mathbb{P}(V))$ est paire ou si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors f a un point fixe. Trouver $f \in PGL_2(\mathbb{R})$ sans point fixe.

Exercice 4 (Audin p. 207)**.** Soient f et g deux homographies d'une droite projective ayant chacune deux points fixes. Montrer que f et g commutent si et seulement si elles ont les mêmes points fixes.

Exercice 5 (Perspectives, Audin p. 208)**.** Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux hyperplans projectifs de $\mathbb{P}(V)$ et $A \notin \mathcal{H} \cup \mathcal{H}'$. Soit p_A l'application $\mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ qui à M associe l'intersection de (AM) avec $\mathcal{H}'$. Montrer que p_A est une homographie de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}'$.

Exercice 6 (Le théorème des trois perspectives)**.** Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ trois droites d'un plan projectif qui concourent en O. Soient A, B et C trois points distincts tels que $A \notin \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3$, $B \notin \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_3$ et $C \notin \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$. On considère les perspectives (voir exercice 5) $p_A : \mathcal{D}_2 \to \mathcal{D}_3$, $p_B : \mathcal{D}_3 \to \mathcal{D}_2$ et $p_C : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$ de centres respectifs A, B et C. Montrer que si $p_C \circ p_B \circ p_A = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}_2}$ alors A, B et C sont alignés.

Exercice 7 (Isomorphismes exceptionnels, Perrin p. 106)**.** Démontrer les isomorphismes suivants :

$$GL_2(\mathbb{F}_2) = PGL_2(\mathbb{F}_2) = PSL_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}(3) \qquad PGL_2(\mathbb{F}_4) = PSL_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}(5)$$
$$PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}(4) \qquad PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}(4).$$

Exercice 8. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, montrer que les homographies sont des applications lisses.
Remarque. En particulier, les homographies préservent les tangences.

Exercice 9. Montrer que l'image d'un repère projectif par une homographie est un repère projectif de l'image.

Exercice 10 (Action du groupe des homographies)**.** Soit $\mathbb{P}(V)$ un $\mathbb{K}$-espace projectif de dimension finie.

1. Montrer que l'action $PGL(V) \curvearrowright \mathbb{P}(V)$ est 2-transitive. Trouver une obstruction à sa 3-transitivité.
2. Trouver un invariant total pour l'action de $PGL(V)$ sur les sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$.
3. Montrer que $PGL(V)$ agit simplement transitivement sur les repères projectifs de $\mathbb{P}(V)$.

Exercice 11 (Plus de dénombrement)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps de cardinal q. Combien y a-t-il de repères projectifs dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$? Quel est le cardinal de $PGL_{n+1}(\mathbb{K})$?