Espaces projectifs, sous-espaces, familles libres et génératrices

Exercice 1. Soit H un hyperplan de $\mathbb{P}(V)$ et $M \in \mathbb{P}(V) \setminus H$, montrer que toute droite passant par M coupe H en un unique point.

Exercice 2. Montrer que 3 points non alignés de $\mathbb{P}(V)$ définissent un unique plan projectif.

Exercice 3. Soient P et Q deux sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$. Montrer que

$$\langle P \cup Q \rangle = \Pi\left(\left(\Pi^{-1}(P) \cup \{0\}\right) + \left(\Pi^{-1}(Q) \cup \{0\}\right)\right).$$

Donner la dimension de $\langle P \cup Q \rangle$ en fonction des dimensions de P, Q et $P \cap Q$.

Exercice 4 (Dénombrement)**.** Soit $\mathbb{K}$ un corps de cardinal q. Quel est le cardinal de $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$? Combien y a-t-il de sous-espaces projectifs de dimension k dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$?

Exercice 5 (Dobble, cf. article de M. Bourrigan sur Images des Maths)**.** En utilisant le plan projectif sur $\mathbb{F}_7$, expliquer comment, à partir de 57 symboles différents, on peut créer 57 cartes, chacune avec 8 symboles dessus, de telle sorte que deux cartes distinctes ont toujours un et un seul symbole en commun. Réfléchir à des applications ludiques !

Exercice 6 (Le plan de Fano)**.** Identifier le plan projectif sur $\mathbb{F}_2$ à la figure 1.

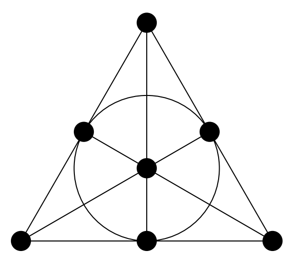

Figure 1 – Le plan de Fano

Exercice 7. Vérifier que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Exercice 8 (Topologie des espaces projectifs)**.** Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$) muni de sa topologie quotient est compact.
Remarque. Le point pénible est de montrer qu'il est séparé. En fait c'est une variété lisse compacte sans bord de dimension n (resp. $2n$). Cela permet de parler de tangence dans ces espaces.

Exercice 9. Montrer que $\mathcal{A}$ engendre $\mathbb{P}(V)$ si et seulement si $\mathrm{Vect}(\Pi^{-1}(\mathcal{A})) = V$.

Exercice 10. Soient $(A_1, \ldots, A_k) \in \mathbb{P}(V)$. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, soit $x_i \in \Pi^{-1}(A_i)$. Montrer que $(A_1, \ldots, A_k)$ est projectivement libre si et seulement si $(x_1, \ldots, x_k)$ est libre dans V.

Exercice 11. Soit $\mathbb{P}(V)$ un espace projectif de dimension $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'une famille génératrice de $\mathbb{P}(V)$ est de cardinal au moins $n + 1$.
2. Montrer qu'une famille libre de $\mathbb{P}(V)$ est de cardinal au plus $n + 1$.
3. Montrer qu'une famille génératrice de cardinal $n + 1$ est libre.
4. Montrer qu'une famille libre de cardinal $n + 1$ est génératrice.