Différentielle extérieure, théorèmes de Stokes et Frobenius

Exercice 1 (Échauffement)**.** Calculer $d\omega$, où ω est la forme suivante sur $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Exercice 2 (Forme d'angle)**.** Soient α la 1-forme différentielle $(x,y) \mapsto \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $f : (r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer $d\alpha$.
2. La forme $f^*(\alpha)$ est-elle fermée ? Est-elle exacte ?
3. α est-elle exacte ?
   Indication : considérer $i^*\alpha$ où $i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ est l'injection canonique et montrer que si $i^*\alpha$ était exacte, elle s'annulerait en un point de $\mathbb{S}^1$.

Exercice 3 (Formule de Stokes)**.**

1. Soient M une variété orientée compacte sans bord et $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$, calculer $\displaystyle\int_M d\alpha$.
2. Une forme volume sur M peut-elle être exacte ?
3. Qu'en est-il sur une variété orientée, sans bord, mais non compacte ?

Exercice 4. Soient $X : (x,y,z) \mapsto \frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial z}$ et $Y : (x,y,z) \mapsto \frac{\partial}{\partial y}$ deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer qu'en tout point $p \in \mathbb{R}^3$, $(X(p), Y(p))$ est libre.
2. Calculer $[X,Y]$. La distribution engendrée par X et Y est-elle intégrable ?
3. Retrouver ce résultat sans utiliser le théorème de Frobenius.

Exercice 5 (Construction de cartes)**.** Soient $X : (x,y) \mapsto x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ et $Y : (x,y) \mapsto x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$ deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer $[X,Y]$. Existe-t-il des coordonnées (s,t) sur un voisinage de $(1,0)$ telles que $X = \frac{\partial}{\partial s}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial t}$?
2. Calculer les flots de X et Y.
3. En déduire une carte explicite sur un voisinage de $(1,0)$ telle que les coordonnées (s,t) associées vérifient $X = \frac{\partial}{\partial s}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial t}$.