Formes différentielles, orientabilité

Exercice 1. 1. Soient $f : t \mapsto e^t$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\alpha = \frac{dx}{x}$, calculer $f^*\alpha$.

2. Même question avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ et $\alpha = dx \wedge dy$.

Exercice 2 (Orientabilité)**.** 1. Montrer qu'une variété parallélisable est orientable.

2. Montrer qu'un produit de variétés orientables est orientable.

3. Montrer que le fibré tangent d'une variété est une variété orientable.

Exercice 3 (Sphères)**.** 1. La sphère $\mathbb{S}^n$ est-elle orientable ?

2. Soient $dV = dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^n$ la forme volume standard de $\mathbb{R}^{n+1}$ (i.e. la forme égale au déterminant en tout point) et $X : x \mapsto \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ le champs de vecteurs radial. Expliciter $\omega = X \lrcorner dV$ (on rappelle que $(Y \lrcorner \alpha)(Y_1, \ldots, Y_p) = \alpha(Y, Y_1, \ldots, Y_p)$).

3. Vérifier que ω est invariante sous l'action de $SO_{n+1}(\mathbb{R})$.

4. Soit $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ l'injection canonique, montrer que $i^*(\omega)$ est une forme volume.

Exercice 4 (Tores)**.** Le tore $\mathbb{T}^n$ est-il orientable ? Si oui, construire une forme volume.

Exercice 5 (Espaces projectifs)**.** 1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $x \mapsto -x$. Cette application préserve-t-elle l'orientation ?

2. L'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ est-il orientable ?