Champs de vecteurs et dérivée de Lie

Exercice 1 (Redressement du flot)**.** Soient M une variété fermée et $X \in \Gamma(TM)$. Soit $a \in M$ tel que $X(a) \neq 0$, montrer qu'il existe des coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n)$ autour de a telles que $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

Question bonus : Les orbites sont-elles des sous-variétés ?

Exercice 2 (Transitivité du groupe des difféomorphismes)**.**

1. Soient a et b dans la boule ouverte $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tel que $f(a) = b$ et $f \equiv \mathrm{Id}$ hors de $\mathbb{B}$.
2. Soit M une variété connexe, montrer que le groupe des difféomorphismes de M agit transitivement sur M.
3. Cette action est-elle k-transitive ($k \in \mathbb{N}^*$) ?

Exercice 3 (Retraction de sous-niveaux)**.** Soit M une sous-variété fermée de $\mathbb{R}^n$ et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse, on note $M_a = \{x \in M \mid f(x) \leqslant a\}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f^{-1}(]a-\varepsilon, b+\varepsilon[)$ ne contienne pas de point critique de f, pour un certain $\varepsilon > 0$. Montrer que M_a et M_b sont difféormorphes.

Exercice 4 (Dérivée de Lie)**.** Soient M une variété, $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

1. Montrer que $\mathcal{L}_X f = df \cdot X$.
2. Montrer que $\mathcal{L}_X(fY) = f\mathcal{L}_X Y + (df \cdot X)Y$.
3. Soient $\omega \in \Omega^1(M)$, montrer que
$$\mathcal{L}_X(\omega(Y)) = (\mathcal{L}_X\omega)(Y) + \omega(\mathcal{L}_X Y).$$

Exercice 5 (Crochet de Lie)**.**

1. Soient X et $Y \in \Gamma(TM)$, montrer que $[X, Y]$ vérifie bien la règle de Leibniz (i.e. est une dérivation et définie bien un champ de vecteurs).
2. Vérifier que le crochet de Lie satisfait l'identité de Jacobi :
$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$
En déduire que $\mathcal{L}_X([Y, Z]) = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z]$.
3. Soit φ un difféomorphisme. Montrer que $\varphi_*([X, Y]) = [\varphi_* X, \varphi_* Y]$.
4. Soient f et g deux fonctions lisses sur M, montrer que
$$[fX, gY] = f(X \cdot g)Y - g(Y \cdot f)X + fg[X, Y].$$