
Fibrés vectoriels

Exercice 1 (Fibré tangent de la sphère). Écrire les fonctions de transitions pour le fibré tangent de \mathbb{S}^n et les trivialisations données par les projections stéréographiques de pôle nord et sud.

Exercice 2 (Trivialisations locales et référentiels). Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel de rang r . Soit U un ouvert de M , montrer qu'une trivialisations locale de U définit r sections locales s_1, \dots, s_r de E au-dessus de U telles que, pour tout $x \in U$, $(s_1(x), \dots, s_r(x))$ est une base de la fibre E_x au-dessus de x .

Inversement, soient s_1, \dots, s_r des sections locales de $E \rightarrow M$ au-dessus de U telles que pour tout $x \in U$, $(s_1(x), \dots, s_r(x))$ est une base de E_x . Montrer que ces sections définissent une trivialisations locale de E au-dessus de U .

Exercice 3 (Sections globales). 1. Décrire les sections du fibré trivial $M \times \mathbb{R}^r \rightarrow M$.

2. Un fibré vectoriel $E \rightarrow M$ a-t-il toujours des sections non nulles ?
3. Soit $L \rightarrow M$ un fibré en droites. Donner un critère de trivialité portant sur ses sections globales ?
4. Le fibré tangent de \mathbb{S}^1 est-il trivial ?
5. Trouver un critère de trivialité du même type pour un fibré $E \rightarrow M$ de rang $r > 1$.
6. Le fibré tangent du tore \mathbb{T}^n est-il trivial ?

Exercice 4 (Sous-fibrés). Soient $\pi : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel de rang r , on dit que $V \subset E$ est un sous-fibré de E de rang k si, au voisinage de tout point, il existe une trivialisations de E telle que :

$$\pi^{-1}(U) \cap V \simeq U \times (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \subset U \times \mathbb{R}^r.$$

1. Vérifier qu'un sous-fibré vectoriel est un fibré vectoriel.
2. Soit $M \subset N$ une sous-variété. Montrer que $TM \rightarrow M$ est un sous-fibré de $i^*(TN)$, où $i : M \rightarrow N$ est l'injection canonique.

Exercice 5 (Fibré tautologique). On note $J = \{(D, v) \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in D\}$.

1. Montrer que $J \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ est un fibré en droites. Est-il trivial ?
2. On note $L \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ le fibré dual de J . Soit P un polynôme homogène de degré d en $n+1$ variables. Montrer que P définit naturellement une section globale de $L^{\otimes d}$.

Exercice 6 (Fibré normal). On munit \mathbb{R}^n de son produit scalaire usuel, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^n . On appelle fibré normal de M l'ensemble

$$NM = \left\{ (x, v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid v \in T_x M^\perp \right\}.$$

1. Vérifier que NM est un fibré vectoriel sur M et donner son rang.
2. Montrer que le fibré trivial $M \times \mathbb{R}^n \rightarrow M$ est isomorphe à $TM \oplus NM$.
3. Le fibré normal de \mathbb{S}^{n-1} est-il trivial ?
4. Le fibré normal d'une hypersurface est-il trivial ?