Algèbre multilinéaire

Exercice 1 (Produits tensoriels sur $\mathbb{R}$)**.** Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension n et m respectivement. On note $e = (e_j)$ une base de E et $f = (f_i)$ une base de F.

1. Soit $\alpha \in (E^*)^{\otimes k}$, identifier les coordonnées de α dans la base de $(E^*)^{\otimes k}$ associée à e.
2. Expliciter un isomorphisme naturel entre $E^* \otimes F$ et $\mathcal{L}(E, F)$.
3. Soit $L : E \to F$ linéaire de matrice $M = (m^i_j)$ dans les bases e et f, quelle est la matrice de L^* dans les bases duales e^* et f^* ?
4. On définit la contraction $c : E \otimes E^* \to \mathbb{R}$ par $c(e_i \otimes e^j) = \delta^j_i$. Soit $L : E \to E$ linéaire, reconnaitre $c(L)$.

Exercice 2 (Produit extérieur et déterminant)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension n, on note (e_i) une base de E et (e^i) sa base duale. Soit également $k \in \{1, \dots, n\}$.

1. Soient α et β des formes multilinéaires, vérifier que $\mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta) = \mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\alpha) \otimes \mathrm{Alt}(\beta))$.
2. Vérifier que le produit extérieur est associatif et anticommutatif.
3. Soient $\alpha^1, \dots, \alpha^k \in E^*$, montrer que $\left(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k\right)(v_1, \dots, v_k) = \det\left((\alpha^i(v_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant k}\right)$.
4. En déduire que la famille $\left\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \;\middle|\; i_1 < \cdots < i_k\right\}$ est une base de $\bigwedge^k E^*$. Donner la décomposition sur cette base d'une forme k-linéaire alternée ω.

Exercice 3 (Tiré-en-arrière)**.** Soient E et F deux espaces vectoriels et $L : E \to F$ linéaire.

1. Montrer que pour toutes formes alternées α et β, on a $L^*(\alpha \wedge \beta) = L^*(\alpha) \wedge L^*(\beta)$.
2. Soient (e_j) et (f_i) des bases de E et F respectivement. On note $M = (m^i_j)$ la matrice de L dans ces bases. Soit $J = (j_1, \dots, j_k)$ un multi-indice tel que $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant n$, on note $e^J = e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k}$. Avec des notations similaires dans F, soit $\omega = \sum \omega_I f^I$ où la somme porte sur les multi-indices croissants. Exprimer $L^*(\omega)$ dans la base des (e^J).

Exercice 4 (Algèbre extérieure)**.**

1. Existe-t-il une forme multilinéaire alternée α sur un espace vectoriel E tel que $\alpha \wedge \alpha \neq 0$?
2. Existe-t-il une forme alternée non nulle qui commute à toutes les autres ?

Exercice 5 (Formes décomposables)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension n. Une forme k-linéaire alternée sur E est dite *décomposable* si elle s'écrit comme produit extérieur de k formes linéaires. Sinon on dit qu'elle est *indécomposable*.

1. Montrer que les formes linéaires et n-linéaires alternées sont toujours décomposables.
2. Soit $\alpha \in E^* \setminus \{0\}$, montrer qu'une forme k-linéaire alternée $\omega \neq 0$ est divisible par α (i.e. s'écrit comme $\alpha \wedge \beta$) si et seulement si $\alpha \wedge \omega = 0$.
3. Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ une famille libre de E^*. La 2-forme $\omega = \alpha \wedge \beta + \gamma \wedge \delta$ est-elle décomposable ?
4. Une $(n-1)$-forme ω est-elle toujours décomposable (on suppose $n > 1$) ? On pourra considérer l'application $\phi_\omega : \alpha \mapsto \alpha \wedge \omega$ de E^* dans $\bigwedge^n E^*$.