Théorème de Sard, transversalité

Exercice 1. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension m avec $2m < n$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\| < \varepsilon$ et $(M + v) \cap M = \emptyset$.
(*Bonus*) Que se passe-t-il pour $n \leqslant 2m$?

Exercice 2 (Variété d'incidence)**.** Soient M une variété lisse et V un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{C}^\infty(M)$ qui contient les constantes.

1. Montrer que $\Sigma = \{(f, x) \in V \times M \mid f(x) = 0\}$ est une hypersurface de $V \times M$ et décrire l'espace $T_{(f,x)}\Sigma$.
2. Dans cette question on suppose que $M = \mathbb{R}$.
   (a) Soit $(f, x) \in \Sigma$ tel que $f'(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe U et V, des voisinages ouverts de f et x respectivement, et $\varphi : U \to V$ lisse telle que $\varphi(f) = x$ et $g(\varphi(g)) = 0$ pour tout $g \in U$.
   (b) En déduire que, dans $\mathbb{R}_d[X]$, les racines simples d'un polynôme sont des fonctions lisses des coefficients.
   (c) (*Bonus*) Que se passe-t-il au niveau des racines multiples ?
3. Soient p_V et p_M les projections de Σ sur V et M.
   (a) Montrer que p_M est une submersion.
   (b) Déterminer les points critiques de p_V, puis ses valeurs critiques.
   (c) Montrer que l'ensemble des $f \in V$ tels que $f^{-1}(0)$ est une hypersurface de M est de mesure pleine.

Exercice 3 (Transversalité)**.** Soient $\mathcal{C}$ le cylindre de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x-1)^2 + y^2 = 1\right\}$$

et S_r la sphère de centre 0 et de rayon $r > 0$. Pour quelles valeurs de r l'intersection $\mathcal{C} \cap S_r = M_r$ est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^3$? Que se passe-t-il dans les cas critiques ?

Exercice 4. Soient M, N et P trois variétés différentiables, $F : M \to P$ lisse et $G : N \to P$ une submersion. On pose

$$Q = \{(x, y) \in M \times N \mid F(x) = G(y)\},$$

montrer que Q est une variété et calculer sa dimension.