Sous-variétés, plongements

Exercice 1 (Exemples de groupes de Lie)**.** Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont des variétés et décrire leurs tangents en I_n.

Exercice 2 (Matrices de rang fixé)**.** Soit V_r l'ensemble des matrices réelles de taille $m \times n$ de rang exactement r. On veut montrer que V_r est une sous-variété de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\{M \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{rg}(M) \geqslant r\}$ est un ouvert.
2. Soit $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ par blocs où $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible. Montrer que $M \in V_r$ si et seulement si $D = CA^{-1}B$.
3. En déduire que V_r est une variété de dimension $(m+n-r)r$.

Exercice 3 (Points fixes d'involutions)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application lisse telle que $f \circ f = \mathrm{Id}$. On pose $\mathrm{Fix}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = x\}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{Fix}(f)$, $(d_x f)^2 = \mathrm{Id}$.
2. On suppose que $f(0) = 0$. On définit $h = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Id} + d_0 f \circ f\right)$. Montrer que h est un difféomorphisme entre voisinages de 0. Montrer que $h \circ f = d_0 f \circ h$.
3. En déduire que $\mathrm{Fix}(f)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.
4. *(Bonus)* Que dire de $\mathrm{Fix}(f)$ lorsque $f \circ \cdots \circ f = \mathrm{Id}$ (itérée k-ième) ?

Exercice 4 (Image d'une immersion injective)**.**

1. Soit $h : M \to N$ une immersion injective propre (i.e. l'image réciproque d'un compact de N est compacte). Montrer que h est un plongement.
2. Soit $h : t \mapsto \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, t\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$ de $]-\infty; 1[$ dans $\mathbb{R}^2$. On note $M = h\left(]-\infty; 1[\right)$. L'application h est-elle une immersion injective ? Est-elle propre ? Est-ce un plongement ? Est-ce que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?
3. Soit $i :]-1; 1[\to \mathbb{R}$ l'inclusion canonique. Montrer que i est une immersion injective. Est-elle propre ? Est-ce un plongement ?
4. Soit $h : M \to N$ une immersion injective telle que $h(M)$ soit une sous-variété de N. Es-ce un plongement ?

Exercice 5. Existe-t-il une variété M compacte, sans bord, de dimension $n > 0$ qui s'immerge dans $\mathbb{R}^n$?

Exercice 6 (Plongement de Veronese)**.** On rappelle que l'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ est le quotient de $\left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right)$ par la relation de colinéarité. Si $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on dit $(x_0 : \ldots : x_n)$ sont les *coordonnées homogènes* de la droite engendrée par x.

Soit $h : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^5$ définie par $h(x : y : z) = (x^2 : y^2 : z^2 : xy : yz : zx)$.

1. Vérifier que h est bien définie.
2. Montrer que h est un plongement.