Variétés, applications différentiables

Exercice 1 (La sphère). 1. Montrer directement que $\mathbb{S}^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\right\}$ est une variété lisse de dimension n, en construisant un atlas.

2. *(bonus)* Quel est le lien entre cette structure différentielle et celle construite dans la dernière question de l'exercice 4 du TD précédent.
3. Que ce passe-t-il si on remplace la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ par une autre norme $\|\cdot\|$?
4. *(bonus)* Combien faut-il de cartes au minimum pour définir un atlas sur la sphère ?

Exercice 2 (Produit de variétés). Soient M et N deux variétés lisses. Montrer que $M \times N$ est une variété lisse. Quelle est sa dimension ? En déduire que $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ est une variété.

Exercice 3 (Le tore). 1. Construire une structure différentielle sur le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ telle que la projection canonique $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ soit un difféomorphisme local.

2. Montrer que l'homéomorphisme de $\mathbb{T}^n$ vers $(\mathbb{S}^1)^n$ construit dans l'exercice 3 du premier TD est un difféomorphisme.
3. *(bonus)* Combien faut-il de cartes au minimum pour définir un atlas sur le tore $\mathbb{T}^n$?

Exercice 4 (Espaces projectifs). On rappelle que $\mathbb{RP}^n$ est défini comme $\left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right)/\mathbb{R}^*$. Soit $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, on note $(x_0 : \ldots : x_n)$ sa classe dans $\mathbb{RP}^n$.

1. Soit $i \in \{0, \ldots, n\}$, montrer que $U_i = \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{RP}^n \mid x_i \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{RP}^n$ homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ via la projection canonique $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$.
2. Montrer que $\mathbb{RP}^n$ est une variété lisse.
3. Montrer que p est lisse.
4. Montrer que p restreinte à $\mathbb{S}^n$ est un difféomorphisme local.

Exercice 5 (Variétés à bord). On rappelle qu'une variété à bord de dimension n est un espace topologique M, séparé, à base dénombrable et muni d'un atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, où $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ est un ouvert du demi-espace $H^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geqslant 0\}$ et les changements de cartes sont des restrictions à H^n de difféomorphismes entre ouverts de $\mathbb{R}^n$.
On note $\partial H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ le bord de H.

1. Montrer que la boule $\overline{\mathbb{B}^n} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$ est une variété à bord.
2. Soient M une variété à bord de dimension n et $x \in M$ tel que $\varphi_\alpha(x) \in \partial H^n$ pour un certain α. Montrer que pour tout β tel que $x \in U_\beta$, $\varphi_\beta(x) \in \partial H^n$.
   On appelle *bord* de M et on note ∂M l'ensemble des $x \in M$ tels que $\varphi_\alpha(x) \in \partial H^n$ pour un certain α (donc pour tous).
3. Montrer que $M \setminus \partial M$ est ouvert dans M et est une variété sans bord de dimension n.
4. Montrer que ∂M est une variété sans bord de dimension $n - 1$.
5. *(bonus)* Le produit de deux variétés à bord est-il une variété à bord (pour la structure différentielle produit) ? Et le produit d'un variété à bord par une variété sans bord ?