Rappels de topologie et calcul différentiel

Exercice 1 (Calculs de différentielles)**.** Justifier que les applications suivantes sont différentiables et expliciter leur différentielle.

1. $(A, B) \mapsto AB$ de $\mathcal{M}_{nk}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{kp}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$.
2. $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
3. $f \mapsto f^{-1}$ de $GL(E)$ dans lui-même, où E est un espace vectoriel réel de dimension finie.
4. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert d'adhérence compacte et V un espace vectoriel de dimension finie, formé de fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on considère alors $(f, x) \mapsto f(x)$ de $V \times \Omega \to \mathbb{R}$.
5. *(bonus)* Dans le cas de la question 3, que se passe-t-il si E est un espace de Banach de dimension quelconque ? (cf. St Raymond, sect. X.9 par exemple)

Exercice 2 (Restriction)**.** Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une application lisse, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit V un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ tel que $V \cap \Omega \neq \emptyset$, montrer que $f_{/V}$ est lisse. Exprimer la différentielle de $f_{/V}$ en fonction de celle de f.

Exercice 3 (Topologie quotient)**.**

1. Soient X un espace topologique et $\sim$ une relation d'équivalence sur X, on note $p : X \to X/\sim$ la projection canonique. Rappeler la définition de la topologie quotient sur $X/\sim$.
2. Soit $f : X/\sim \to Y$, montrer que f est continue si et seulement si $f \circ p$ est continue.
3. Soit $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, montrer que $\mathbb{T}^n$ est compact et p est ouverte.
4. Soit $\mathbb{RP}^n$ l'espace obtenu en quotientant $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence "être colinéaire", montrer que $\mathbb{RP}^n$ est compact et p est ouverte.
5. Soit $f : K \to Y$ continue bijective avec K compact, f est-elle un homéomorphisme ?
6. On définit $\mathbb{S}^1$ comme $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, montrer que $\mathbb{T}^1$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$. Plus généralement montrer que $\mathbb{T}^n$ est homéomorphe à $(\mathbb{S}^1)^n$.
7. *(bonus)* Soit $\mathbb{CP}^n$ l'espace obtenu en quotientant $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence "être $\mathbb{C}$-colinéaire", montrer que $\mathbb{CP}^n$ est compact et p est ouverte.

Exercice 4 (Sous-variétés)**.**

1. Rappeler les quatre définitions équivalentes de sous-variété lisse de dimension d de $\mathbb{R}^n$.
2. Parmi les ensembles suivants, dire lesquels sont des sous-variétés lisses de $\mathbb{R}^n$ et donner leur dimension. On n'attend pas de justification détaillée.
   (a) La sphère unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne.
   (b) La sphère unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme sup.
   (c) L'union disjointe d'un plan et d'une droite de $\mathbb{R}^3$.
   (d) Le tore $(\mathbb{S}^1)^n \subset \mathbb{R}^{2n}$.
   (e) L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$.
   (f) L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mid x^2 - y^2 = 0\}$.
   (g) L'image de l'application $h :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}^2$ définie par $h : t \mapsto \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, t\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$.
3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une immersion injective, $h(\Omega)$ est-elle une variété ?
4. Montrer qu'une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^n$ de dimension d est une variété lisse de dimension d.