La grassmannienne

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $k \in \{1, \dots, n\}$, on note $Gr_k(E)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension k. L'objectif est de définir une structure de variété lisse compacte sur $Gr_k(E)$. Ceci permet ensuite de parler de régularité d'un chemin de k-plans dans E, par exemple.

Description comme quotient. On commence par décrire $Gr_k(E)$ comme quotient d'un espace sympathique, pour pouvoir le manipuler plus facilement. L'idée est de chosir un k-plan en en choisissant une base, c'est-à-dire une famille libre de E de cardinal k.

Soit $\mathcal{I}(\mathbb{R}^k, E) = \left\{\phi \in L(\mathbb{R}^k, E) \;\middle|\; \mathrm{rg}(\phi) = k\right\}$ l'ensemble des applications linéaires injectives de $\mathbb{R}^k$ dans E. Pour tout $\phi \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^k, E)$, $F_\phi = \phi(\mathbb{R}^k)$ est un sous-espace de E de dimension k. Réciproquement un tel sous-espace est de la forme F_ϕ pour un certain $\phi \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^k, E)$. De plus, ϕ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^k$ sur F_ϕ. On note $\phi^\dagger : F_\phi \to \mathbb{R}^k$ l'unique application linéaire telle que $\phi^\dagger\phi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^k}$ et $\phi\phi^\dagger$ est l'inclusion de F_ϕ dans E.

Si $F_\phi = F_\psi$, alors $\phi^\dagger\psi$ est bien définie et appartient à $GL_k(\mathbb{R})$. Alors $\phi\phi^\dagger\psi = \psi$ et ϕ et ψ diffèrent d'un élément de $GL_k(\mathbb{R})$. Inversement, si $\psi = \phi A$ avec $A \in GL_k(\mathbb{R})$ alors $F_\phi = F_\psi$. Ensemblistement on a donc

$$Gr_k(E) = \mathcal{I}(\mathbb{R}^k, E)/GL_k(\mathbb{R}),$$

où $GL_k(\mathbb{R})$ agit par $A \cdot \phi = \phi A^{-1}$. On munit $Gr_k(E)$ de la topologie quotient et on note $\mathcal{F} : \phi \mapsto F_\phi$ la projection canonique. Dans la suite on verra indifférement un élément de $Gr_k(E)$ comme sous-espace ou comme classe d'application linéaire.

Remarque. $\mathcal{I}(\mathbb{R}^k, E)$ est un ouvert de $L(\mathbb{R}^k, E)$. Fixons une base de $\mathbb{R}^k$ et une base de E, on note M_ϕ la matrice de $\phi \in L(\mathbb{R}^k, E)$ dans les bases considérées. Alors $\mathrm{rg}(\phi) = k$ si et seulement si l'un des déterminants extraits de taille k de M_ϕ est non nul, ce qui est une condition ouverte.

Ouverts standards. Soit $G \in Gr_{n-k}(E)$, on note $U_G = \{F \in Gr_k(E) \mid F \oplus G = E\}$. On a alors que U_G est ouvert si et seulement si

$$\mathcal{F}^{-1}(U_G) = \left\{\phi \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^k, E) \;\middle|\; F_\phi \oplus G = E\right\}$$

est ouvert. Montrons que c'est le cas.

Soient $(a_1, \dots, a_n)$ une base de E telle que $(a_{k+1}, \dots, a_n)$ est une base de G et $(e_1, \dots, e_k)$ une base de $\mathbb{R}^k$. Notons M_ϕ la matrice de ϕ dans ces bases. Les colonnes de M_ϕ sont $\phi(e_1), \dots, \phi(e_k)$ et forment une base de F_ϕ. Alors $F_\phi \oplus G = E$ si et seulement si la famille $(\phi(e_1), \dots, \phi(e_k), a_{k+1}, \dots, a_n)$ est une base de E, c'est-à-dire si et seulement si la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} M_\phi & \begin{array}{c} 0 \\ \hline I_{n-k} \end{array} \end{array}\right)$$

est inversible. Ici I_{n-k} est la matrice identité de taille $n-k$.

Si M'_ϕ est le bloc $k \times k$ supérieur de M_ϕ, on a donc $\phi \in \mathcal{F}^{-1}(U_G)$ si et seulement si $\det(M'_\phi) \neq 0$. C'est donc bien un ouvert.

Cartes affines. Il faut maintenant construire un homéomorphisme entre U_G et un ouvert d'un certain espace vectoriel. Pour cela, fixons un supplémentaire $F_0 = \mathcal{F}(\phi_0)$ de G.

L'idée de base est simple : tout élément de U_G s'écrit d'une unique façon comme le graphe d'un certain $f \in L(F_0, G)$ (voir plus bas), ce qui va nous fournir l'homéomorphisme souhaité.

Commençons par rappeler que le graphe de $f \in L(F_0, G)$ est, dans notre cas,

$$\mathrm{Graph}(f) = \{x + f(x) \mid x \in F_0\} \subset F_0 \oplus G = E.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E de dimension k et $\mathrm{Graph}(f) \cap G = \{0\}$ donc $\mathrm{Graph}(f) \in U_G$.

On va construire une application continue de $L(F_0, G)$ dans U_G qui sera l'inverse de la carte recherchée. Notons i_0 l'identité de F_0. Soit $f \in L(F_0, G)$, $i_0 + f$ est linéaire de F_0 dans $F_0 \oplus G = E$. Cette application est injective. En effet, soit $x \in \ker(i_0 + f)$, on a $x = -f(x) \in G$ mais $x \in F_0$, donc $x = 0$. Par ailleurs, $(i_0 + f)(F_0) = \mathrm{Graph}(f)$.

Soit $f \in L(F_0, G)$, comme $F_0 = \phi_0(\mathbb{R}^k)$ on peut définir $\phi_f = (i_0 + f) \circ \phi_0 = \phi_0 + f \circ \phi_0$. Comme ϕ_0 et $(i_0 + f)$ sont linéaires et injectives, il en est de même de ϕ_f. De plus,

$$\phi_f(\mathbb{R}^k) = (i_0 + f)(F_0) = \mathrm{Graph}(f).$$

et $\mathrm{Graph}(f) \cap G = \{0\}$ donc $\phi_f \in \mathcal{F}^{-1}(U_G)$.

Notons $\chi_{F_0,G} : L(F_0, G) \to \mathcal{F}^{-1}(U_G)$ l'application $f \mapsto \phi_f = \phi_0 + f \circ \phi_0$. C'est une application affine, donc continue. Alors $\mathcal{F} \circ \chi_{F_0,G} : L(F_0, G) \to U_G$ est continue. Notons qu'on a une expression simple :

$$\mathcal{F} \circ \chi_{F_0,G} : f \mapsto \mathrm{Graph}(f).$$

Remarque. En particulier, ça ne dépend pas du choix d'un antécédent ϕ_0 de F_0, alors que $\chi_{F_0,G}$ en dépend.

Lemme 1. *Pour tout $F \in U_G$, il existe un unique $f \in L(F_0, G)$ tel que $F = \mathrm{Graph}(f)$. En particulier, $\mathcal{F} \circ \chi_{F_0,G}$ est une bijection continue de $L(F_0, G)$ vers U_G.*

Démonstration. Notons p_{F_0} la projection sur F_0 parallèlement à G et p_G la projection sur G parallèlement F_0. Soit $F \in U_G$, comme $F \cap G = \{0\}$, $(p_{F_0})_{/F}$ est injective, et donc est un isomorphisme de F sur F_0.

On raisonne par analyse et synthèse. Supposons que $F = \mathrm{Graph}(f)$. Pour tout $y \in F$, il existe $x \in F_0$ tel que $y = x + f(x)$. Alors, $x = p_{F_0}(y)$ et $f(x) = p_G(y) = p_G \circ \left((p_{F_0})_{/F}\right)^{-1}(x)$. Donc $f = p_G \circ \left((p_{F_0})_{/F}\right)^{-1}$. Ce qui donne l'unicité.

Inversement, si $f = p_G \circ \left((p_{F_0})_{/F}\right)^{-1}$ alors $\mathrm{Graph}(f)$ est un sous-espace de dimension k de E. Pour tout $y \in F$,

$$y = p_{F_0}(y) + p_G(y) = p_{F_0}(y) + f\left(p_{F_0}(y)\right) \in \mathrm{Graph}(f).$$

Donc $F \subset \mathrm{Graph}(f)$, ce qui donne l'égalité par un argument de dimension. □

Il faut ensuite construire l'inverse de $\mathcal{F} \circ \chi_{F_0,G}$ et vérifier qu'il est bien continu. Pour comprendre ce qu'il se passe il est utile de regarder les matrices dans de bonnes coordonnées.

Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de $\mathbb{R}^k$ et $a_i = \phi_0(e_i)$ pour $i \leqslant k$, alors $(a_1, \ldots, a_k)$ est une base de F_0. Si $(a_{k+1}, \ldots, a_n)$ est une base de G, alors les (a_i) forment une base de E. Soit $f \in L(F_0, G)$, la matrice de $\phi_f = \chi_{F_0,G}(f)$ dans les bases $(e_1, \ldots, e_k)$ et $(a_1, \ldots, a_n)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} I_k \\ M_f \end{pmatrix},$$

où M_f est la matrice de f dans les bases $(a_1, \ldots, a_k)$ et $(a_{k+1}, \ldots, a_n)$ et I_k est l'identité de taille k. Pour retrouver f à partir de ϕ_f, il suffit de trouver la partie de ϕ_f correspondant au bloc M_f.

Si on conserve la même base pour E mais qu'on change de base de $\mathbb{R}^k$ en faisant agir une certaine matrice $A \in GL_k(\mathbb{R})$, la matrice de ϕ_f est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} A^{-1} \\ M_f A^{-1} \end{pmatrix}.$$

Cela sugère de poser $\tilde{\varphi}_{F_0,G} : \mathcal{F}^{-1}(U_G) \to L(F_0, G)$ définie par $\tilde{\varphi}_{F_0,G}(\phi) = (p_G \circ \phi) \circ (p_{F_0} \circ \phi)^{-1}$.

Remarque. $\phi \in U_G$ donc $F_\phi \oplus G = E$ et donc la projection p_{F_0} induit un isomorphisme de F_ϕ vers F_0. Donc $p_{F_0} \circ \phi$ est bien un isomorphisme de $\mathbb{R}^k$ dans F_0.

Les compositions et le passage à l'inverse sont des applications continues donc $\tilde{\varphi}_{F_0,G}$ est continue. Par ailleurs, soient $\phi \in \mathcal{F}^{-1}(U_G)$ et $A \in GL_k(\mathbb{R})$, alors $\psi = \phi A \in \mathcal{F}^{-1}(U_G)$ et

$$\tilde{\varphi}_{F_0,G}(\psi) = (p_G \phi A) \circ (p_{F_0} \phi A)^{-1} = (p_G \phi)\, A A^{-1}\, (p_{F_0} \phi)^{-1} = \tilde{\varphi}_{F_0,G}(\phi).$$

Donc $\tilde{\varphi}_{F_0,G}$ passe au quotient. Et l'application quotient $\varphi_{F_0,G} : U_G \to L(F_0, G)$ est continue. On sait déjà que $\mathcal{F} \circ \chi_{F_0,G} : L(F_0, G) \to U_G$ est une bijection continue. Il reste à vérifier que $\varphi_{F_0,G}$ est sa réciproque.

Soit $f \in L(F_0, G)$, on a :

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{F_0,G} \circ \chi_{F_0,G}(f) &= (p_G\phi_f)\,(p_{F_0}\phi_f)^{-1} = (p_G(i_0+f)\phi_0)\,(p_{F_0}(i_0+f)\phi_0)^{-1} = (p_G(i_0+f))\,(p_{F_0}(i_0+f))^{-1} \\ &= f \circ i_0^{-1} = f.\end{aligned}$$

Donc $\tilde{\varphi}_{F_0,G} \circ \chi_{F_0,G} = \mathrm{Id}$ et donc $\varphi_{F_0,G} \circ \mathcal{F} \circ \chi_{F_0,G} = \mathrm{Id}$. Au final, on a construit un homéomorphisme $\varphi_{F_0,G} : U_G \to L(F_0, G)$.

Séparabilité. Soient F et $F' \in Gr_k(E)$, il existe G un supplémentaire commun à F et F'. Alors, F et $F' \in U_G$ qui est homéomorphe à un espace vectoriel de dimension finie (par exemple par $\varphi_{F,G}$) donc séparé. Il existe donc V et V' deux ouverts de U_G (et donc de $Gr_k(E)$) tels que $F \in V$, $F' \in V'$ et $V \cap V' = \emptyset$. Donc $Gr_k(E)$ est séparé.

Changements de carte. Il serait trop technique de décrire tous les changements de cartes, on va donc se restreindre à un atlas avec peu de cartes. Fixons une base $(a_1, \ldots, a_n)$ de E. On fixe aussi une base $(e_1, \ldots, e_k)$ de $\mathbb{R}^k$. Dorénavant, toutes les matrices considérées seront écrites dans ces bases.

Pour tout $I \subset \{1, \ldots, n\}$ de cardinal k, on note

$$F_I = \mathrm{Vect}(a_i \mid i \in I), \qquad G_I = \mathrm{Vect}(a_i \mid i \notin I), \qquad U_I = U_{G_I} \qquad \text{et} \qquad \varphi_I = \varphi_{F_I,G_I}.$$

Si $M \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$, on note M_I la matrice extraite de M en ne gardant que les lignes d'indices $i \in I$.

Lemme 2.

$$Gr_k(E) = \bigcup_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} U_I.$$

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^k, E)$, sa matrice M_ϕ est de rang k. Il existe donc une matrice extraite de taille k inversible. C'est-à-dire, il existe I de cardinal k tel que $\det((M_\phi)_I) \neq 0$. Cela signifie que le k-plan F_ϕ engendré par les colonnes de M_ϕ est un supplémentaire de G_I (voir la section sur les ouverts standards plus haut). Donc $\phi \in U_I$. $\square$

Soient I et $J \subset \{1, \ldots, n\}$ de cardinal k, on va décrire l'application :

$$\varphi_J \circ \varphi_I^{-1} : \{f \in L(F_I, G_I) \mid \mathrm{Graph}(f) \cap G_J = \{0\}\} \longrightarrow \{f \in L(F_J, G_J) \mid \mathrm{Graph}(f) \cap G_I = \{0\}\}$$

et vérifier qu'elle est lisse.

Par les définitions de la section précédente on a $\varphi_J \circ \varphi_I^{-1} = \varphi_J \circ \mathcal{F} \circ \chi_I = \tilde{\varphi}_J \circ \chi_I$, où on a noté $\chi_I = \chi_{F_I,G_I}$ et $\tilde{\varphi}_J = \tilde{\varphi}_{F_J,G_J}$.

Remarque. La construction de χ_I dépend du choix d'un ϕ_I tel que $\mathcal{F}(\phi_I) = F_I$, mais heureusement le changement de cartes n'en dépend pas. Si $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$, on peut par exemple choisir ϕ_I qui envoie e_j sur a_{i_j} pour tout j.

Soit maintenant $f \in L(F_I, G_I)$ telle que $\mathrm{Graph}(f) \cap G_J = \{0\}$. On a

$$\tilde{\varphi}_J \circ \chi_I(f) = \tilde{\varphi}_J(\phi_I + f \circ \phi_I) = (p_{G_J}(\phi_I + f \circ \phi_I))\,(p_{F_J}(\phi_I + f \circ \phi_I))^{-1}$$

ce qui montre que $\tilde{\varphi}_J \circ \chi_I(f)$ est lisse, mais on le voit mieux matriciellement.

Soit N la matrice de f. Si $I = \{1, \ldots, k\}$, alors la matrice de $\chi_I(f)$ est $M_f = \begin{pmatrix} I_k \\ N \end{pmatrix}$. Sinon M_f est une matrice obtenue à partir de celle-ci en permutant les lignes (la permutation ne dépendant que de I).

Comme $f \in \varphi_I(U_J)$, la matrice extraite $(M_f)_J$ est inversible. On a alors que $\tilde{\varphi}_J \circ \chi_I(f)$ a pour matrice :

$$(M_f)_{J^C}\,((M_f)_J)^{-1}.$$

Les coefficients de cette matrice sont des fractions rationnelles en les coefficients de N, donc sont lisses.

Ainsi (U_I, φ_I) est un atlas lisse sur $Gr_k(E)$.

Autres descriptions et compacité. Comme dans le cas de l'espace projectif, on va trouver une autre description de $Gr_k(E)$ pour montrer que c'est un compact.

Pour choisir un k-plan de $Gr_k(E)$, on choisit une famille libre de cardinal k. On pourrait aussi choisir une base de E, et ne conserver que les premiers vecteurs. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, les autres bases de E s'obtiennent par l'action de $GL(E)$.

À $M \in GL(E)$, on associe le k-plan F_M engendré par $(Me_1, \dots, Me_k)$. On a $F_M = F_N$ si et seulement si $M^{-1}N$ stabilise $E_0 = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. Donc on a une bijection $GL(E)/H \to Gr_k(E)$ où H est le stabilisateur de E_0.

Remarque. Dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ les éléments de H ont pour matrice un élément de $GL_n(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $A \in GL_k(\mathbb{R})$ et $C \in GL_{n-k}(\mathbb{R})$.

Remarquons que dans notre construction initiale, on peut remplacer $\mathbb{R}^k$ par n'importe quel $\mathbb{R}$-espace vectoriel V de dimension k. On a alors $Gr_k(E) = \mathcal{I}(V, E)/GL(V)$. On peut en particulier choisir $V = E_0$.

On peut alors reformuler ce qui précède comme suit. On a une application naturelle $r : GL(E) \to \mathcal{I}(E_0, E)$ définie par $M \mapsto M_{/E_0}$. L'application r est continue, donc $\mathcal{F} \circ r : GL(E) \to Gr_k(E)$ est continue (avec le point de vue précédent $\mathcal{F}(r(M)) = F_M$). Cette application passe au quotient par H et définit alors une bijection continue $\alpha : GL(E)/H \to Gr_k(E)$. On voudrait montrer que c'est un homéomorphisme, mais la continuité de la réciproque n'est pas évidente. Le lemme suivant montre que $GL(E)/H$ est séparé.

Lemme 3. *Soit $f : X \to Y$ une bijection continue avec Y séparé, alors X est séparé.*

Supposons que E est muni d'un produit scalaire, et supposons que la base $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base orthonormée. On peut alors définir un k-plan par le choix d'une base orthonormée et refaire la même chose que précédemment en faisant agir $O(E)$ sur la base $(e_1, \dots, e_n)$.

La restriction à $O(E)$ de $\mathcal{F} \circ r$ est continue pour la topologie induite, et surjective. En effet, tout élément de $Gr_k(E)$ admet une base orthonormée.

Ceci prouve, en particulier, que la restriction à $O(E)$ de la projection $\pi : GL(E) \to GL(E)/H$ est surjective. Soit $M \in GL(E)$, $F_M = \mathcal{F}(r(M))$ admet une base orthonormée, donc il existe $O \in O(E)$ tel que $F_O = F_M$. Donc $M^{-1}O \in H$ et $\pi(M) = \pi(O)$.

Comme $H \cap O(E) = O(E_0) \times O(E_0^{\perp})$ (le voir matriciellement), l'application $(\mathcal{F} \circ r)_{/O(E)}$ induit une bijection continue :

$$\beta : O(E)/\big((E_0) \times O(E_0^{\perp})\big) \to GL(E)/H.$$

Le lemme 3 montre que $O(E)/\big((E_0) \times O(E_0^{\perp})\big)$ est séparé. Comme c'est l'image du compact $O(E)$ par la projection canonique qui est continue, $O(E)/\big((E_0) \times O(E_0^{\perp})\big)$ est compact.

Alors β est continue d'un compact dans un espace séparé et bijective, donc c'est un homéomorphisme. En particulier, $GL(E)/H$ est compact, et le même raisonnement montre que α est un homéomorphisme.

Finalement $Gr_k(E)$ est compact, et on a trouvé deux descriptions alternatives :

$$Gr_k(E) \simeq O(E)/\big((E_0) \times O(E_0^{\perp})\big) \simeq GL(E)/H.$$