Fiche 8 - Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis et formules de Taylor

Exercice 1. Montrer que l'équation $x^{20\,000}+x+1=0$ ne peut avoir plus de deux racines réelles.

Exercice 2. En utilisant le théorème des accroissements finis montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$: $\frac{x}{x+1} \leqslant \ln(x+1) \leqslant x$ et $\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1)-\ln(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

Exercice 3. Déterminer le polynôme de Taylor à l'ordre 2 des fonctions suivantes aux points indiqués.

1. $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$, en $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.
2. $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$, en $x_0 = 0$.
3. $f : x \mapsto (x+1)^\alpha$, en $x_0 = 0$.
4. $f : x \mapsto \sin(3x)$, en $x_0 = 0$ et $x_1 = \frac{\pi}{2}$.
5. $f : x \mapsto e^{2x}$, en $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.
6. $f : x \mapsto \ln(1+2x)$, en $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.
7. $f : x \mapsto \cos(x)^2$, en $x_0 = 0$ et $x_1 = \frac{\pi}{2}$.
8. $f : x \mapsto \sqrt{1+\arcsin(x)}$, en $x_0 = 0$.

Exercice 4. Déterminer une valeur approchée à la précision 10^{-3} de $\cos\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 5. À l'aide de la formule de Taylor-Lagrange montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a : $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x)$.

Exercice 6. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0,1]$ dérivable sur $[0,1[$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et $f'(0) = 0$. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(0) = 0$ et pour tout $x \in]0,1]$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

1. Montrer que g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle.
2. En déduire qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.
3. Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0;2]$ et dérivable sur $]0;2[$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]0,2[$ tel que $f(2) - f(0) = 2f'(c)$.
3. Déterminer tous les $c \in]0;2[$ qui vérifient cette condition.