

## Fiche 7 - Fonctions circulaires, hyperboliques et leurs réciproques

**Exercice 1.** Pour chacune des fonctions suivantes,

- déterminer l'ensemble image  $F$ ,
- donner un ensemble  $E$ , le plus grand possible tel que  $f$  réalise une bijection de  $E$  sur son image,
- donner l'allure graphique de la bijection réciproque (avec l'ensemble choisi).

1.  $f : x \mapsto x$

2.  $g : x \mapsto |x|$

3.  $h : x \mapsto x^2$

4.  $i : x \mapsto x$

5.  $j : x \mapsto \frac{3x+5}{x^2+1}$

6.  $k : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

**Exercice 2.** À l'aide de ceux des fonctions  $\exp$ ,  $\sin$  et  $\cos$ , donner le domaine de définition, le domaine de continuité, le domaine de dérivabilité, la dérivée et l'allure graphique des fonctions  $\tan$ ,  $\text{ch}$ ,  $\text{sh}$ ,  $\text{th}$ ,  $\arccos$ ,  $\arcsin$ ,  $\arctan$ ,  $\text{argch}$ ,  $\text{argsh}$  et  $\text{argth}$ .

**Exercice 3.** Déterminer l'ensemble des valeurs de  $x$  telles que :

a.  $\sin(\arcsin x) = x$ .

b.  $\arcsin(\sin x) = x$ .

c.  $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$ .

**Exercice 4.** Évaluer :

a.  $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$

e.  $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

h.  $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$

b.  $\arctan\left(\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right)$

f.  $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

i.  $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$

c.  $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)\right)$

g.  $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$

j.  $\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan 2\right)$

d.  $\tan(\arctan(3))$

k.  $\text{ch}\left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$

l.  $\text{sh}\left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$

**Exercice 5.** Déterminer l'allure graphique des fonctions

a.  $x \mapsto \arcsin \circ \sin x$ .

b.  $x \mapsto \arccos \circ \cos x$ .

c.  $x \mapsto \arctan \circ \tan x$ .

**Exercice 6.** Déterminer, lorsque c'est possible, les solutions des équations suivantes :

a.  $\arcsin x = \frac{2\pi}{3}$

f.  $\arccos x + \arctan \frac{1}{2} = \pi$

b.  $\arctan x = \frac{2\pi}{3}$

g.  $\arccos x + \arctan \frac{1}{2} = \frac{3\pi}{3}$

c.  $\arcsin x + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$

h.  $\text{ch}(x) = 2$

d.  $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$

e.  $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$

i.  $2\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = 1$

**Exercice 7.** Montrer :

1.  $\forall x \in [-1; 1], \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ , 3.  $\forall x < 0, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ .

2.  $\forall x > 0, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ ,