Fiche 6 - Fonctions réelles

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition des fonctions réelles suivantes. Où sont-elles continues ? Dérivables ?

1. $f : x \mapsto 3$
2. $f : x \mapsto x^3 + 8x^2 - 5$
3. $f : x \mapsto \sqrt{x-1}$
4. $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
5. $f : x \mapsto \frac{3x+5}{x^2+1}$
6. $f : x \mapsto \frac{3x+5}{x^2-1}$
7. $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2-2x})$
8. $f : x \mapsto |x|$
9. $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$
10. $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Exercice 2. Déterminer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes en 0^+, 0^-, 0 et $+\infty$. On précisera aussi les domaines de définition.

1. $f : x \mapsto x^2 - 5x + 1$
2. $f : x \mapsto -3x + 4$
3. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$
4. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$
5. $f : x \mapsto x \ln(x)$
6. $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$
7. $f : x \mapsto \frac{\exp(x)}{x^7}$
8. $f : x \mapsto x^{12} \exp(-x)$
9. $f : x \mapsto \cos(x)$
10. $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$

Exercice 3. Déterminer la limite au point indiqué des fonctions suivantes, après avoir précisé leur domaine de définition.

1. $f : x \mapsto \frac{x-2\ln(x)}{e^x-1}$, en $+\infty$
2. $f : x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, en 0
3. $f : x \mapsto \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-9}$, en 3
4. $f : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, en 0
5. $f : x \mapsto x^3 + 7x\sin(x)$, en $+\infty$
6. $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor e^{-x}$, en $+\infty$
7. $f : x \mapsto \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$, en $+\infty$
8. $f : x \mapsto \frac{x^3-1}{x^2-1}$, en 1
9. $f : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x)$, en $+\infty$
10. $f : x \mapsto \ln(1 - x^3 e^x)$, en $-\infty$

Exercice 4. Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$
2. $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$
3. $\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$
4. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

Exercice 5. On note $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $g : x \mapsto x^2 - 1$ et $h : x \mapsto \frac{1}{x}$.

1. Pour chacune de ces fonctions, donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée sur ce domaine.
2. Faire de même avec toutes les composées de deux de ces fonctions.

Exercice 6. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son domaine de définition, le domaine sur lequel elle est dérivable, et calculer sa dérivée.

1. $f : x \mapsto (x^2+1)\sqrt{x^3-1}$
2. $f : x \mapsto \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}+1}$
3. $f : x \mapsto \frac{1}{3}\tan(x)^3 - \tan(x) + x$
4. $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
5. $f : x \mapsto \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)-1}{\sqrt{x^2+1}}$
6. $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)$

Exercice 7. Calculer la dérivée et la dérivée seconde des fonctions suivantes. Déterminer les points critiques de ces fonctions et leur nature (minimum, maximum ou point d'inflexion).

1. $f : x \mapsto \frac{x^3}{3} - x + 5$
2. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$
3. $f : x \mapsto x^3$

Exercice 8. Étudier les fonctions suivantes (domaine de définition, continuité, dérivabilité, limites éventuelles, variations, extrema) et tracer leur graphe.

1. $f : x \mapsto x^2(x-1)^3$
2. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$
3. $f : x \mapsto x^2 e^{-x}$
4. $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$

Exercice 9. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$. Soit $a \in \mathbb{R}$, discuter le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$ d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, en fonction de la valeur de a.

Exercice 10. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

Exercice 11.

1. Pour chacune des fonctions suivantes expliciter l'ensemble image, puis montrer que ces fonctions réalisent des bijections de classe $\mathcal{C}^1$ (dérivables à dérivées continues) de leur domaine de définition vers leur image.

   (a) $\begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$
   (b) $\begin{array}{ccc}]0, \pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$
   (c) $\begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) \end{array}$

2. Pour chacune de ces fonctions, calculer la dérivée de la bijection réciproque qui est notée respectivement :

   (a) arcsin
   (b) arccos
   (c) arctan.

Exercice 12. On considère la fonction polynomiale $P : x \mapsto x^{11} - 8x + 4$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer les dérivées première et seconde de P.
2. Montrer que P s'annule au plus trois fois sur $\mathbb{R}$.
   Indication : utiliser le théorème de Rolle.

Exercice 13. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$. Ce point est-il unique ? Le résultat est-il encore vrai sans hypothèse de continuité ?
Indication : considérer l'application $g : x \mapsto f(x) - x$.

Exercice 14.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

   Cette fonction est-elle continue ? Est-elle dérivable ?

2. Mêmes questions avec la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$