Fiche 5 - Applications linéaires et matrices (suite)

Exercice 1. On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Quels sont les produits matriciels possibles ? En calculer au moins cinq.

Exercice 2. Pour chacune des matrices suivantes, calculer son carré et son cube.

$$F = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des vecteurs colonnes X tels que :

1. $FX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. $FX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. $GX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
4. $GX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
5. $HX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
6. $HX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
7. $JX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
8. $JX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercice 4. Calculer le déterminant de chacune des matrices de l'exercice 2.

Exercice 5. Calculer l'inverse, lorsqu'il existe de chacune des matrices de l'exercice 2.

Exercice 6. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

a. Calculer A^2 et A^3.

b. Calculer A^n pour tout entier n strictement positif.

Exercice 7. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer AB et BA et les comparer.
2. Calculer $\det(A)$ et $\det(B)$.
3. Vérifier par le calcul que $\det(AB) = \det(BA)$. Comparer avec $\det(A)\det(B)$.

Exercice 8. On considère les matrices suivantes :

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Quelles sont celles qui déterminent des symétries ? Des projections ? Des rotations ?