Fiche 4 - Applications linéaires et matrices

Exercice 1. Parmi les applications suivantes indiquer, en justifiant, celles qui sont linaires.

a. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x + 3y, 3x - 5y)$
c. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x + 2y, y - z^2)$
b. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ , f(x, y) = \sin(x)$
d. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + y, 2x + 3y)$

e. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\quad f(x) = \lfloor x \rfloor$ (Où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.)
f. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\quad f(x, y, z) = (x + y + 1, y - z, 3x + z + 2)$
g. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\quad f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Exercice 2. Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels concernés.
a. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x + 3y, 3x - 5y)$
b. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x - 3y, x + y)$
c. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(x, y) = (2x - y, x + y, x - y)$
d. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x + y, y - z)$

Exercice 3. Pour chaque application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et chaque vecteur (u, v, w) ci-dessous, déterminer tous les vecteurs (x, y, z) tels que $f(x, y, z) = (u, v, w)$.
a. $f(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + y, x - y + z)$ et $(u, v, w) = (0, 0, 0)$
b. $f(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + y, x - y + z)$ et $(u, v, w) = (1, 2, 1)$
c. $f(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$ et $(u, v, w) = (0, 0, 0)$
d. $f(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$ et $(u, v, w) = (1, -1, 0)$
e. $f(x, y, z) = (x, x - z, x + z)$ et $(u, v, w) = (0, 0, 0)$
f. $f(x, y, z) = (x, x - z, x + z)$ et $(u, v, w) = (0, 1, -2)$

Exercice 4. Les applications linéaires suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leurs inverses.
a. $f(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + y, x - y + z)$
b. $f(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$
c. $f(x, y, z) = (x, x - z, x + z)$
d. $f(x, y, z) = (2x + z, 3x - 2y, -x + 2y + 3z)$
e. $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 3y + z, 3x + y + 2z)$
f. $f(x, y, z) = (-x + y + 3z, -x - 4y, 2y + 5z)$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ les deux applications linéaires définies, en coordonnées cartésiennes, par

$$f(x, y) = (2x + y, -y, x - 2y), \quad g(x, y, z) = (x - z, 2y).$$

a. Calculer les applications composées $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
b. Trouver les matrices A et B qui représentent f et g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
c. Vérifier que les produits BA et AB représentent les composés $g \circ f$ et $f \circ g$.