Fiche 3 - Géométrie du plan et de l'espace

Exercice 1. 1. Les couples de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants sont-ils formés de vecteurs linéairement indépendants ? Forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$?

(a) $(-1, 2)$ et $(3, -5)$ (b) $(2, -1)$ et $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$

2. Les couples de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants sont-ils formés de vecteurs linéairement indépendants ? Forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

(a) $(1, -2, 1)$ et $(-3, 6, -3)$ (b) $(3, -1, 1)$ et $(6, -2, -2)$

3. Les triplets de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants sont-ils formés de vecteurs linéairement indépendants ? Forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

(a) $(1, 2, 3)$, $(-1, 1, 1)$ et $(0, 1, -1)$ (c) $(1, -1, 3)$, $(-2, 1, 6)$ et $(0, 0, 1)$
(b) $(1, 2, 3)$, $(-1, 1, 1)$ et $(0, 3, 4)$ (d) $(1, -1, 3)$, $(1, -1, 0)$ et $(0, 0, 1)$

Exercice 2. 1. (a) Les vecteurs $\vec{e_1} = (-1, 1)$ et $\vec{e_2} = (1, 1)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$?

(b) Si oui, déterminer les coordonnées cartésiennes du point $A = (3, 4)$ dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, où $O = (0, 0)$.

2. Reprendre les questions 1a et 1b avec $\vec{e_1'} = (2, -1)$ et $\vec{e_2'} = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$.

3. (a) Les vecteurs $\vec{e_1} = (1, 1, 0)$, $\vec{e_2} = (0, 1, 1)$ et $\vec{e_3} = (1, 0, 1)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

(b) Si oui, déterminer les coordonnées cartésiennes du vecteur $\vec{u} = (-4, -3, 2)$ dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

Exercice 3. Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les deux vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$.

1. Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et le produit scalaire $u \cdot v$.
2. Calculer les coordonnées cartésiennes du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.
3. Représenter le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ainsi que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u} + \vec{v}$.
4. Déterminer les deux vecteurs unitaires orthogonaux à $\vec{u}$ et les représenter.

Exercice 4. Dans l'espace euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les trois vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{w} = -2\vec{k}$.

1. Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$ et le produit scalaire $u \cdot v$.
2. Représenter le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, ainsi que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
3. Calculer les produits vectoriels suivants et représenter les vecteurs correspondants dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(a) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (b) $\vec{v} \wedge \vec{u}$ (c) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ (d) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$

4. Calculer le produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Exercice 5. Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ on considère les points $A = (1, 2)$ et $B = (-1, 0)$.

1. Déterminer la distance entre A et B.
2. Déterminer l'équation de la droite Δ passant par A et B.
3. Déterminer la distance du point $C = (1, 1)$ à Δ.
4. Déterminer l'équation de la droite parallèle à Δ passant par O.
5. Déterminer l'équation de la droite perpendiculaire à Δ passant par O.
6. Déterminer l'aire du parallélogramme de côtés $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

Exercice 6. Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ on considère le point $A = (5, 3)$ et la droite Δ d'équation cartésienne $x - y + 1 = 0$.

1. Déterminer l'équation de la droite parallèle à Δ passant par O.
2. Déterminer l'équation de la droite perpendiculaire à Δ passant par A.
3. Déterminer la distance de A à Δ.
4. Déterminer la projection orthogonale de A sur Δ.

Exercice 7. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on considère le point $A = (-1, 1, 2)$.

1. Déterminer les équations des plans suivants :
   (a) le plan orthogonal au vecteur $\vec{u} = (1, -2, 1)$ et passant par A,
   (b) le plan parallèle au plan d'équation $3x - 2y + 4z - 5 = 0$ et passant par A,
   (c) le plan passant par A, $B = (1, 2, -1)$ et $C = (3, 0, -1)$.
2. Déterminer la distance du point $D = (1, 1, 0)$ au plan passant par A, B et C.

Exercice 8. Soient $A = (1, 0, 2)$, $B = (0, 1, 1)$ et $C = (1, -1, 0)$ trois points de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. On note Δ la droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$.

1. Déterminer un paramétrage de la droite Δ.
2. Déterminer, si elle existe, l'intersection de Δ avec le plan d'équation $z = 0$.
3. Déterminer une équation cartésiennne de Δ.
4. Déterminer une équation cartésienne du plan contenant Δ et passant par $(0, 0, 0)$.
5. Déterminer la distance de $D = (1, 2, 3)$ à la droite Δ.
   Indication : commencer par déterminer l'équation cartésienne du plan orthogonal à Δ passant par D.
6. Calculer le volume du parallélépipède s'appuyant sur les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

Exercice 9. Soient A, B et C trois points non alignés du plan euclidien. On note H le point d'intersection des hauteurs issues de A et de B respectivement dans le triangle ABC.

1. Faire un schéma, et remarquer que $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
2. Montrer analytiquement que $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Qu'en conclure ?
   Indication : penser à utiliser la relation de Chasles et les propriétés du produit scalaire.