

Fiche 2 - Nombres complexes (suite)

Exercice 1. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

- | | | | |
|---------------|-----------------------------------|---|---------------------------------------|
| a. $1 + i$, | d. 3 , | g. $2e^{i\frac{\pi}{3}}$, | j. $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3+i}}$, |
| b. $1 + 2i$, | e. -3 , | h. $e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{2}}$, | k. $\frac{9+2i}{3-2i}$, |
| c. i , | f. $\frac{4}{5} + i\frac{3}{5}$, | i. $-2e^{1+i\frac{\pi}{3}}$, | l. $\frac{2-5i}{1+i}$. |

Exercice 2. Factoriser dans \mathbb{R} et dans \mathbb{C} les trinômes suivants :

- | | | |
|---------------------|----------------------|--|
| a. $x^2 + 4x + 4$, | d. $x^2 + 1$, | g. $6x^2 + 7$, |
| b. $x^2 - 3x$, | e. $5x^2 + 2x + 1$, | |
| c. $x^2 - x + 5$, | f. $3x^2 + 4x + 1$, | h. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1$. |

Exercice 3. Résoudre dans \mathbb{R} et dans \mathbb{C} les équations suivantes :

- | | | |
|-------------------------|--------------------------|--|
| a. $x^2 + 4x + 4 = 0$, | d. $x^2 + 1 = 0$, | g. $6x^2 + 7 = 0$, |
| b. $x^2 - 3x = 0$, | e. $5x^2 + 2x + 1 = 0$, | |
| c. $x^2 - x + 5 = 0$, | f. $3x^2 + 4x + 1 = 0$, | h. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1 = 0$. |

Exercice 4. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a. $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i = 0$, | d. $z^2 - (3 + 2i)z + 5 + 5i = 0$, |
| b. $2z^2 + (5 + i)z + 2 + 2i = 0$, | e. $ z ^2 - 2\bar{z} = 0$ |
| c. $z^2 - (3 + 4i)z + 7i - 1 = 0$, | f. $z^2 - 2\bar{z} = 0$. |

Exercice 5. Pour chacun des polynômes de degré 3 suivants, trouver une racine évidente z_0 , puis trouver une factorisation de la forme $p(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$. En déduire les solutions de l'équation $p(z) = 0$.

- $z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i$,
- $z^3 - (7 + i)z^2 + (18 + 3i)z - 16 - 2i$,
- $z^3 - (5 + 5i)z^2 + (3 + 12i)z + 1 - 7i$,
- $z^3 - 4z^2 - 3z + 2 + i(6 + 3z - 3z^2)$,
- Factoriser dans \mathbb{C} le polynôme $p(z) = z^4 - (3 + 4i)z^3 - (9 + i)z^2 + (2 + 14i)z$.

Exercice 6. Déterminer les racines troisièmes des nombres complexes suivants :

- | | | | |
|--------------|-----------|---|---------------------------------------|
| a. $1 + i$, | c. 3 , | e. $2e^{i\frac{\pi}{3}}$, | g. $-2e^{1+i\frac{\pi}{3}}$, |
| b. i , | d. -3 , | f. $e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{2}}$, | h. $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3+i}}$, |

Exercice 7. Pour lequel des entiers n suivants 2014, 2015, 2016, 2017 le nombre $(1 + i)^n$ est il imaginaire pur ?

Exercice 8. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$a. z^5 - z = 0 \quad b. (1 + \sqrt{3})z^4 - 1 + i = 0 \quad c. z^6 - (3 + 2i)z^3 + 2 + 2i = 0.$$