Fiche 1 - Nombres complexes

Exercice 1. Simplifier l'écriture des nombres complexes suivants en les mettant sous forme algébrique $a + ib$.

a. $(1 + 3i)\overline{(7 - i)}$
b. $\frac{1+2i}{2+i}$
c. $\frac{2+5i}{1-i}$
d. $(2 + 3i)^3$
e. $e^{i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{4}}$
f. $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$
g. $\frac{9+2i}{3-2i}$
h. $\frac{2-5i}{1+i}$
i. $e^{i\frac{\pi}{6}} e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 2. Calculer la norme des nombres complexes de l'exercice **??**.

Exercice 3. Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique $re^{i\theta}$.

a. $2e^{i\frac{\pi}{3}} \times 3e^{i\frac{\pi}{4}}$
b. $(1 - i)e^{i\frac{\pi}{6}}$
c. $i(\cos(\frac{\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{5}))$
d. $\overline{7e^{i\frac{\pi}{4}}}$
e. $-2e^{1+i\frac{\pi}{3}}$
f. $-1 + i$
g. $\sqrt{3} + i$
h. $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$
i. $-\sqrt{6} + i\sqrt{2}$

Exercice 4. Soient x et $y \in \mathbb{R}$, en utilisant les nombres complexes, démontrer les formules trigonométriques suivantes.

a. $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
b. $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
c. $4\cos(x)^3 - 3\cos(x) = \cos(3x)$
d. $\cos(x)^2 = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$

Exercice 5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on note $A = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \cos(0) + \cos(\theta) + \cdots + \cos(n\theta)$ et $B = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \sin(0) + \sin(\theta) + \cdots + \sin(n\theta)$. On se propose de calculer A et B à l'aide des nombres complexes. On note $Z = A + iB$.

a. Réexprimer Z sous la forme d'une somme d'exponentielles complexes.
b. Calculer Z et en déduire une expression plus simple de A et B.
c. Calculer $1 + \cos(\frac{\pi}{6}) + \cdots + \cos(\frac{5\pi}{6})$.

Exercice 6. Placer les complexes suivants dans un repère orthonormé.

a. $2i$
b. $2 - i$
c. $e^{\frac{2i\pi}{3}}$
d. $1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$
e. $\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})$
f. $\frac{1}{1+i}$

Exercice 7. Déterminer la nature géométriques des sous-ensembles de $\mathbb{C}$ suivants, et tracer ces sous-ensembles.
Indication : pour le **??**, mettre l'équation sous la forme $|z - a|^2 = r^2$.

a. $\{z \in \mathbb{C} \mid z\overline{z} = 4\}$
b. $\{z \in \mathbb{C} \mid z + \overline{z} = 1\}$
c. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = |z + i|\}$
d. $\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z - i) = \frac{\pi}{4}\}$
e. $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid \Re(\frac{z+1}{z-1}) = 0\}$
f. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 - 2\Re((1 - i)z) = -1\}$

Exercice 8. Soient A et B des points du plan complexe d'affixes respectives a et $b \in \mathbb{C}$. Dans chacun des cas suivants, calculer l'affixe z du milieu du segment $[AB]$.

a. $a = 0$ et $b = 1 + i$ b. $a = 1$ et $b = i$ c. $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = e^{i\frac{\pi}{2}}$

Exercice 9. Calculer l'isobarycentre des points du plan complexe A, B, C et D d'affixes respectives 1, i, $1 + i$ et $-1 + i$.

Exercice 10. Soient a et $b \in \mathbb{C}$, montrer que : $|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$. Interpréter géométriquement cette égalité, connue sous le nom d'*identité du parallélogramme.*

Exercice 11. Soit $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

a. Écrire sous forme trigonométrique le complexe $e^{2i\alpha} + 1$.
b. Calculer sa partie réelle et sa partie imaginaire.
c. Placer dans un repère orthonormé les complexes d'affixes $e^{i\alpha}$, $e^{2i\alpha}$, -1, 0 et 1.
d. Identifier sur le schéma un vecteur d'affixe $e^{2i\alpha}+1$ et interpréter géométriquement le résultat de la question **??**. Remarquer qu'on a prouvé le théorème de l'angle au centre.

Exercice 12. Soient A, B, C et D quatre points du plan complexe d'affixes respectives a, b, c et $d \in \mathbb{C}$. On suppose que $a \neq b$ et $c \neq d$, et on note $z = \frac{b-a}{d-c}$.

a. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux si et seulement si $z \in i\mathbb{R}$ (c'est-à-dire z est imaginaire pur).
b. Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.
c. Dans ce cas, montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même sens si $z > 0$ et de sens opposés si $z < 0$.

Exercice 13. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tel que $|z| = 1$.

a. Montrer analytiquement que $\frac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur.
b. Placer les complexes 0, 1, -1, z et le cercle unité dans un repère orthonormé.
c. Interpréter géométriquement le résultat de la question **??** et retrouver un résultat classique sur les triangles inscrits dans un cercle ayant un diamètre pour côté.

Exercice 14. Soient A, B et C trois points distincts du plan complexe, d'affixes respectives a, b et $c \in \mathbb{C}$. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $\frac{c-a}{b-a}$ est égal à $e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou à $e^{-i\frac{\pi}{3}}$.