Devoir Maison 4 - Corrigé

1. Comme le logarithme est défini sur $]0;+\infty[$, la fonction $x \mapsto \ln(x+2)$ est définie sur l'ensemble des réels x tels que $x+2>0$, c'est-à-dire $x>-2$. Ensuite, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto 2x$ est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f étant la somme de ces trois fonctions, elle est définie sur l'intersection de leurs domaines de définition. Donc $D_f =]-2;0[\cup]0;+\infty[$.
2. La fonction ln est dérivable à dérivée continue sur $]0;+\infty[$ et $x \mapsto x+2$ est dérivable à dérivée continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est un polynôme), donc en particulier sur $]-2;+\infty[$. Donc $x \mapsto \ln(x+2)$ est dérivable à dérivée continue sur $]-2;+\infty[$ comme composée de fonctions ayant ces propriétés. Comme $D_f \subset]-2;+\infty[$, c'est encore le cas sur D_f. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable à dérivée continue sur $\mathbb{R}^*$, donc sur D_f, et $x \mapsto 2x$ est dérivable à dérivée continue sur $\mathbb{R}$, donc sur D_f.
   La fonction f est donc dérivable à dérivée continue sur D_f car somme de trois fonctions dérivables à dérivées continues sur ce domaine. Comme dérivable implique continue, f est également continue sur D_f.
   Remarque. On peut aussi argumenter comme précédemment que f est somme de trois fonctions continues, après avoir dit que $x \mapsto \ln(x+2)$ est continue comme composée de fonctions continues.
3. Pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = 2 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+2} = \frac{2x^2(x+2)-(x+2)-x^2}{x^2(x+2)} = \frac{2x^3+3x^2-x-2}{x^2(x+2)}$. On note $P(x) = 2x^3+3x^2-x-2$ et $Q(x) = x^2(x+2)$ pour $x \in D_f$. On alors bien P et Q deux polynômes de degré 3 et $f' = \frac{P}{Q}$.
   Remarque. Comme on veut déterminer le signe de $f'(x)$ pour pouvoir dresser le tableau de variations de f, il est préférable de laisser Q sous forme factorisée.
4. On a $P(-1) = -2+3+1-2 = 0$, donc $x_0 = -1$ est une racine évidente de P. Factorisons P sous la forme $(x-x_0)(ax^2+bx+c)$ avec a, b et $c \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in D_f$, on a :
   $$(x-x_0)(ax^2+bx+c) = (x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c.$$
   Par identification des coefficients il vient $a=2$, $c=-2$, et $a+b=3$ dont on déduit $b=1$. Ainsi $P(x) = (x+1)(2x^2+x-2)$. Il reste à factoriser le facteur de degré 2. On a $\Delta = b^2-4ac = 1-4\times 2\times(-2) = 1+16 = 17 > 0$. Donc $2x^2+x-2$ a deux racines réelles $x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$, et $2x^2+x-2 = 2(x-x_1)(x-x_2)$.
   Remarque. $x_2 - x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}+1+\sqrt{17}}{4} = \frac{\sqrt{17}}{2} > 0$ donc on a bien $x_2 > x_1$.
   Par ailleurs, $16 < 17 < 25$, donc $4 < \sqrt{17} < 5$ par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. On a donc $-6 < -1-\sqrt{17} < -5$ et $-2 < -\frac{6}{4} < x_1 < -\frac{5}{4} < -1$. De même on a $\frac{3}{4} < x_2 < 1$.
5. Les points particuliers à faire apparaître sont -2, $x_0 = -1$ et 0 ainsi que x_1 et x_2 dont la position par rapport aux autres est déterminée dans la remarque précédente. On peut commencer par remarquer que pour $x \in D_f$, $Q(x) = x^2(x+2) > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $P(x) = 2(x+1)(x-x_1)(x-x_2)$. En particulier, pour $x \in D_f : f'(x) = 0 \iff P(x) = 0 \iff x \in \{x_0; x_1; x_2\}$.
   Les signes de $x+1$, $x-x_1$, $x-x_2$ et $f'(x)$ en fonction de x sont résumés dans le tableau suivant, ainsi que les variations de f. Les limites et valeurs qui apparaissent sont justifiées plus bas.

x	-2		$\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$		-1		0		$\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$		$+\infty$
$x+1$	‖	$-$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$x-x_1$	‖	$-$	0	$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
$x-x_2$	‖	$-$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	$f(x_1)$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(x_2)$	↗	$+\infty$

6. Il reste à justifier les valeurs et limites qui apparaissent dans le tableau précédent.
On a $f(x_0) = f(-1) = -2 + \frac{1}{-1} - \ln(1) = -3$.
On a aussi $(x+2) \xrightarrow[x\to-2]{} 0$ et $\ln(x) \xrightarrow[x\to0]{} -\infty$, donc $\ln(x+2) \xrightarrow[x\to-2]{} -\infty$ (limite d'une composée) et $\left(2x + \frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to-2]{} -\frac{9}{2}$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to-2]{} +\infty$ (limite d'une somme).
D'autre part $(2x - \ln(x+2)) \xrightarrow[x\to0]{} -\ln(2)$ et $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to0^-]{} -\infty$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to0^-]{} -\infty$ (limite d'une somme).
De même, comme $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty$, on a $f(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty$.
Enfin en $+\infty$, $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $2x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $\ln(x+2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, donc on a une forme indéterminée “$+\infty - \infty$ ”.
Or, pour tout $x > 0$, $f(x) = 2x + \frac{1}{x} - \ln(x(1+\frac{2}{x})) = 2x + \frac{1}{x} - \ln(x) - \ln(1+\frac{2}{x})$. On a alors $1 + \frac{2}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, donc $\ln(1+\frac{2}{x}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (limite d'une composée). D'autre part, par croissance comparée, $2x - \ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Finalement $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ (limite d'une somme).
Remarque. On a utilisé de façon répétée que pour une fonction ϕ continue en x_0, $\phi(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \phi(x_0)$.
Remarque. On a les valeurs approchées $f(x_1) = -3,012\cdots$ et $f(x_2) = 1,819\cdots$.
7. Pour tout $x > 0$, $\frac{f(x)}{x} = 2 + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x+2)}{x} = 2 + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\ln(1+\frac{2}{x})$. On a ensuite $\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, et $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée. On a vu à la question précédente que $\ln(1+\frac{2}{x}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc $\frac{1}{x}\ln(1+\frac{2}{x}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (limite d'un quotient).
Ainsi $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2$ (limite d'une somme). Par définition, la droite d'équation $y = 2x$ détermine donc la direction asymptotique de f en $+\infty$.
Ensuite $f(x) - 2x = \frac{1}{x} - \ln(x+2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.
Remarque. Comme $f(x) - 2x$ a une limite infinie, f a une direction asymptotique, mais pas d'asymptote.
8. Le graphe doit présenter les tangentes horizontales en x_0, x_1 et x_2, la direction asymptotique représentée par la droite d'équation $y = 2x$, et les asymptotes verticales en -2 et en 0, d'équations respectives $x = -2$ et $x = 0$. Les asymptotes sont tracées avec des tirets. L'asymptote verticale d'équation $x = 0$ n'apparaît pas ici car est confondue avec l'axe des ordonnées.

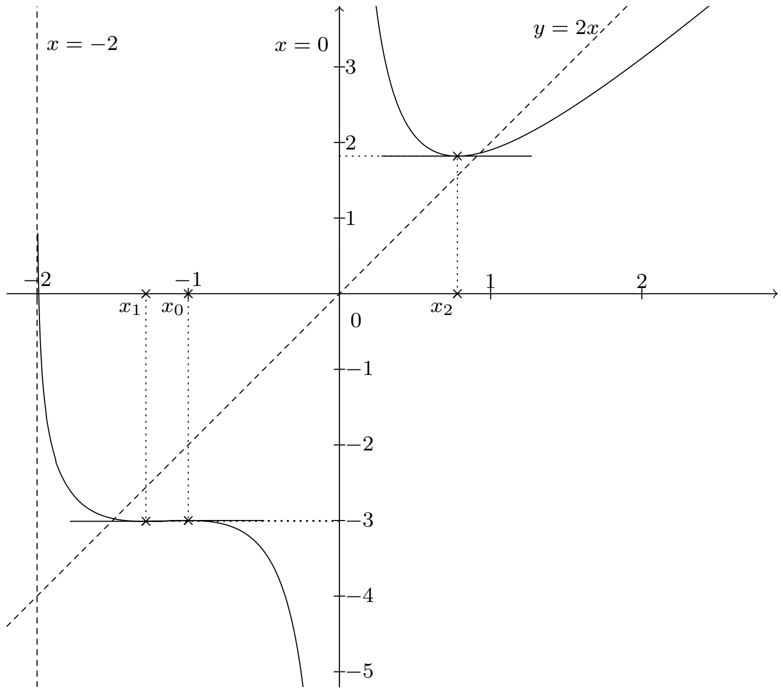

FIGURE 1 – Graphe de f sur $]-2;0[\,\cup\,]0;3[$.

Remarque. Sur la figure 1 on a l'impression que $f(x_0)$ et $f(x_1)$ sont au même niveau, car ces valeurs sont très proches. Néanmoins avec une bonne loupe (figure 2) on peut observer le comportement que l'on a prédit avec le tableau de variations.

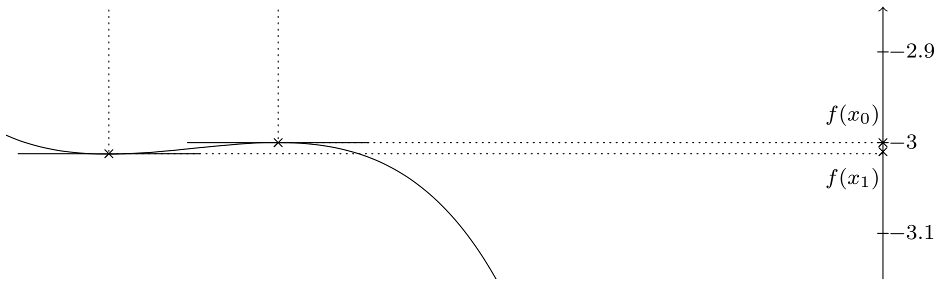

FIGURE 2 – Graphe de f au voisinage de x_0 et x_1.

9. On va utiliser de façon répétée le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) et la monotonie *stricte* de la fonction f en restriction à des intervalles bien choisis.
   Sur l'intervalle $]-2, x_1]$ la fonction f est continue et $f(x) \xrightarrow[x\to -2]{} +\infty$. Donc pour tout $k \in [f(x_1), +\infty[$, il existe $\alpha \in\,]-2; x_1]$ tel que $f(\alpha) = k$, par le théorème des valeurs intermédiaires. Comme de plus $f'(x) < 0$ pour tout $x \in\,]-2; x_1[$ (voir le tableau de signes), f est *strictement* décroissante sur $]-2; x_1]$, et il existe donc au plus un antécédent de k dans $]-2; x_1]$. Finalement, pour tout $k \in [f(x_1); +\infty[$, il existe un unique $\alpha \in]-2; x_1]$ tel que $f(\alpha) = k$.
   Évidemment, pour $k = f(x_1)$ on a $\alpha = x_1$, donc il est aussi vrai que pour tout $k \in\,]f(x_1); +\infty[$ il existe un unique $\alpha \in]-2; x_1[$ tel que $f(\alpha) = k$.
   Enfin, comme f est minorée par $f(x_1)$ sur $]-2; x_1]$, pour tout $k < f(x_1)$ l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution dans $]-2; x_1]$.

Ce raisonnement s'adapte aux autres intervalles sur lesquels f est strictement monotone et continue, à savoir : $[x_1; x_0]$, $[x_0; 0[$, $]0; x_2]$ et $[x_2; +\infty[$. On en déduit les résultats suivants.

- Pour tout $k \in [f(x_1); f(x_0)]$, il existe un unique $\alpha \in [x_1; x_0]$ tel que $f(\alpha) = k$. Et pour les autres valeurs de k, l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution dans $[x_1; x_0]$.
- Pour tout $k \in]-\infty; f(x_0)]$, il existe un unique $\alpha \in [x_0; 0[$ tel que $f(\alpha) = k$. Et pour les autres valeurs de k, l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution dans $[x_0; 0[$.
- Pour tout $k \in [f(x_2); +\infty[$, il existe un unique $\alpha \in]0; x_2]$ tel que $f(\alpha) = k$. Et pour les autres valeurs de k, l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution dans $]0; x_2]$.
- Pour tout $k \in [f(x_2); +\infty[$, il existe un unique $\alpha \in [x_2; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = k$. Et pour les autres valeurs de k, l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution dans $[x_2; +\infty[$.

Mettant tout ceci bout à bout, on en déduit le nombre total de solutions de l'équation $f(x) = k$ en fonction de la valeur de k. On peut même être plus précis, et localiser partiellement ces solutions. Soit $k \in \mathbb{R}$.

- Si $k \in]-\infty; f(x_1)[$, l'équation a une unique solution (dans $]x_0; 0[$).
- Si $k = f(x_1)$, l'équation a deux solutions (x_1 et une autre dans $]x_0; 0[$).
- Si $k \in]f(x_1), f(x_0)[$, l'équation a trois solutions (une dans $]-2; x_1[$, une dans $]x_1; x_0[$ et une dans $]x_0; 0[$).
- Si $k = f(x_0)$, l'équation a deux solutions (x_0 et une dans $]-2, x_1[$).
- Si $k \in]f(x_0); f(x_2)[$, l'équation a une unique solution (dans $]-2; x_1[$).
- Si $k = f(x_2)$, l'équation a deux solutions (x_2 et une dans $]-2; x_1[$).
- Si $k \in]f(x_2); +\infty[$, l'équation a trois solutions (une dans $]-2; x_1[$, une dans $]0; x_2[$ et une dans $]x_2; +\infty[$).