

Devoir Maison 4

À rendre le 24/04/2014 (le 22/04/14 pour le groupe A)

Soit la fonction réelle $f : x \mapsto 2x + \frac{1}{x} - \ln(x + 2)$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f , en justifiant soigneusement.
2. Justifier que f est continue et dérivable sur D_f . La dérivée est-elle continue ?
3. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$. On simplifiera l'écriture de f' pour l'écrire sous la forme d'un quotient de deux polynômes de degré 3 : $f' = \frac{P}{Q}$.
4. Factoriser le polynôme P . On notera x_0 la racine évidente, et x_1 et x_2 les deux autres, avec $x_1 < x_2$.
5. Dresser le tableau de signes de f' , en prenant soin de placer les points particuliers dans le bon ordre.
6. En déduire le tableau de variations de f . On donnera également la valeur de $f(x_0)$ et les limites éventuelles de f au bord de son domaine de définition. Les valeurs exactes de $f(x_1)$ et $f(x_2)$ ne sont pas demandées.
7. Montrer que $\frac{f(x)}{x}$ tend vers une limite réelle l lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire l'existence d'une direction asymptotique pour f . Déterminer la limite de $f(x) - lx$ lorsque x tend vers $+\infty$.
8. Tracer le graphe de f en faisant apparaître les valeurs et tangentes importantes.
9. À l'aide du tableau de variations et du graphe de f , discuter le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ d'inconnue x en fonction de la valeur de $k \in \mathbb{R}$.