Devoir Maison 3 - Corrigé

1. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
f(\lambda(a,b,c) + \mu(u,v,w)) &= f(\lambda a + \mu u, \lambda b + \mu v, \lambda c + \mu w) \\
&= (-(\lambda a + \mu u) - (\lambda b + \mu v) - (\lambda c + \mu w), 2(\lambda a + \mu u) + 2(\lambda b + \mu v) + 2(\lambda c + \mu w)) \\
&= (\lambda(-a - b - c) + \mu(-u - v - w), \lambda(2a + 2b + 2c) + \mu(2u + 2v + 2w)) \\
&= \lambda(-a - b - c, 2a + 2b + 2c) + \mu(-u - v - w, 2u + 2v + 2w) \\
&= \lambda f(a, b, c) + \mu f(u, v, w).
\end{aligned}$$

C'est valable pour (a, b, c), (u, v, w), λ et μ quelconques. Donc pour tout (a, b, c) et $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ et tout λ et $\mu \in \mathbb{R}$, $f(\lambda(a, b, c)+\mu(u, v, w)) = \lambda f(a, b, c)+\mu f(u, v, w)$. Donc f est linéaire.

2. L'application f va de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, donc A est une matrice à deux lignes et trois colonnes. La première colonne de A contient les coordonnées de $f(1, 0, 0) = (-1, 2)$, la deuxième celles de $f(0, 1, 0) = (-1, 2)$ et la troisième celles de $f(0, 0, 1) = (-1, 2)$. Donc $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, résolvons le système $f(x, y, z) = (u, v)$ par pivot de Gauss :

$$f(x,y,z) = (u,v) \iff \left\{\begin{array}{rrrl} -x - y & -z = & u \\ 2x + 2y & +2z = & v \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} -x - y - z = u \\ 0 = 2u + v \end{array}\right.$$

où la seconde équivalence est obtenue en ajoutant deux la première ligne à la seconde. Commençons par remarquer que si $2u + v \neq 0$, alors la seconde ligne du système est absurde. Dans ce cas le système n'a donc pas de solutions.
Supposons maintenant que (u, v) satisfasse $2u + v = 0$. Dans ce cas la seconde ligne du système obtenu ci-dessus est vérifiée par hypothèse, et on a :

$$f(x, y, z) = (u, v) \iff -x - y - z = u \iff x + y + z + u = 0.$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc l'ensemble des triplets (x, y, z) de réels tels que $x + y + z + u = 0$.
Conclusion : soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
Si $2u + v \neq 0$ alors l'équation $f(x, y, z) = (u, v)$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ n'a pas de solutions.
En revanche, si $2u + v = 0$ alors l'ensemble des solutions de cette équation est $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z + u = 0\}$.
Remarque. Géométriquement, cela signifie que l'image de f est la droite de $\mathbb{R}^2$: $\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | 2u + v = 0\}$. Si $(u, v) \notin \Delta$, alors (u, v) n'a pas d'antécédent par f. Mais si $(u, v) \in \Delta$ alors (u, v) a beaucoup d'antécédents par f et l'ensemble de ces antécédents est le plan de $\mathbb{R}^3$: $P_{(u,v)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z + u = 0\}$. On peut remarquer que ces plans dépendent du choix de (u, v) mais qu'ils sont tous parallèles.
Remarque. Attention dans ce qui précède (u, v) et (x, y, z) jouent des rôles différents.

4. On applique la règle de Sarrus :

$$\begin{aligned}\det(B) &= \det\begin{pmatrix}1&-1&3\\1&-2&2\\0&1&0\end{pmatrix}\\ &= (1\times(-2)\times 0)+(1\times 1\times 3)+(0\times(-1)\times 2)-(0\times(-2)\times 3)\\ &\qquad -(1\times(-1)\times 0)-(1\times 1\times 2)\\ &= 0+3+0-0-0-2=1\end{aligned}$$

Comme $\det(B)=1\neq 0$, B est inversible.

5. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, résolvons par pivot de Gauss le système linéaire $B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a les équivalences :

$$\begin{pmatrix}1&-1&3\\1&-2&2\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}x-y+3z\\x-2y+2z\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x-y+3z&=a\\x-2y+2z&=b\\y&=c\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x-y+3z&=a\\-y-z&=b-a\\y&=c\end{cases}\iff\begin{cases}x-y+3z&=a\\y&=c\\-y-z&=b-a\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x-y+3z&=a\\y&=c\\-z&=b-a+c\end{cases}\iff\begin{cases}x-y+3z=a\\y=c\\z=a-b-c\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x-y=a-3(a-b-c)\\y=c\\z=a-b-c\end{cases}\iff\begin{cases}x-y=-2a+3b+3c\\y=c\\z=a-b-c\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x=-2a+3b+4c\\y=c\\z=a-b-c\end{cases}\iff\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2a+3b+4c\\c\\a-b-c\end{pmatrix}$$

$$\iff\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3&4\\0&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

Donc $B^{-1}=\begin{pmatrix}-2&3&4\\0&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$. On calcule son déterminant par la règle de Sarrus :

$$\det(B^{-1})=0+0+(3\times 1\times 1)-0-0-((-1)\times 1\times(-2))=3-2=1$$

Remarque. On a $\det(B^{-1})=\frac{1}{\det(B)}$, ce qui est toujours le cas.

6. On a $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ et $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$. La seule composée qui a du sens est donc $f\circ g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$. La matrice M de $f\circ g$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est le produit des matrices de f et g dans ces mêmes bases :

$$M=AB=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&3\\1&-2&2\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2&-5\\4&-4&10\end{pmatrix}.$$

Remarque. Tout comme on ne peut composer f et g que d'une façon, on ne peut multiplier A et B que d'une façon vues les tailles des matrices.