Devoir Maison 2 - Corrigé

Exercice 1. Commençons par déterminer les racines quatrièmes de l'unité. Ce sont les $e^{i\frac{2k\pi}{4}} = e^{i\frac{k\pi}{2}}$ avec $k \in \{0,1,2,3\}$. On a $e^0 = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\frac{2\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1$ et $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$. Les racines quatrièmes de 1 sont donc 1, i ,-1 et $-i$.
Ensuite $-4 = 4e^{i\pi}$ et $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$, donc $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ est une racine quatrième de -4. On obtient toutes les autres en multipliant $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ par les racines quatrièmes de 1 différentes de 1. On a alors $i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, puis $-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\pi}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ et finalement $-i\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$.
L'ensemble des racines quatrièmes de -4 est donc $\{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}\}$.

Exercice 2.

1. On obtient les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ en soustrayant les coordonnées de A à celles de B : $\overrightarrow{AB} = (2-1, 3-2, 1-3) = (1,1,-2)$. De même on obtient $\overrightarrow{AC} = (3-1, 1-2, 2-3) = (2,-1,-1)$.
$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(-1)-(-1)(-2) \\ (-2)2-1(-1) \\ 1(-1)-1\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ -4+1 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$
Comme $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{0}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont libres, donc en particulier A, B et C ne sont pas alignés.
2. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur orthogonal au plan engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Il est donc orthogonal au plan P. Comme le vecteur $\overrightarrow{u} = (1,1,1) = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ est parallèle à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, il est aussi orthogonal à P, ainsi qu'à tout plan parallèle à P. Les plans parallèles à P sont donc exactement les plans dont une équation cartésienne est de la forme $\overrightarrow{u} \cdot (x,y,z) = k$, où k est une constante réelle (différente pour chacun de ces plans).
On a $\overrightarrow{u} \cdot (x,y,z) = (1,1,1)\cdot(x,y,z) = x+y+z$, donc les plans parallèles à P sont les plans dont une équation cartésienne est de la forme $x+y+z=k$. Pour déterminer l'équation de P, il faut déterminer la valeur de la constante $k_P \in \mathbb{R}$ correspondante. Pour cela, on utilise le fait que $A \in P$, ce qui se traduit par $1+2+3 = k_P$, c'est-à-dire $k_P = 6$. Au final, une équation cartésienne du plan P est : $x+y+z=6$.
Remarque. Toute équation obtenue en multipliant l'équation cartésienne ci-dessus par un réel non nul est également une équation cartésienne de P.
3. D'après ce qu'on vient de dire, comme $P' \parallel P$, une équation cartésienne de P' est de la forme $x+y+z = k_{P'}$, où $k_{P'}$ est un réel à déterminer. Comme $D = (1,1,1) \in P'$, $k_{P'} = 1+1+1 = 3$. Donc $x+y+z=3$ est une équation cartésienne de P', ainsi que toute équation obtenue en multipliant celle-ci par un réel non nul.
4. Les points de Δ sont les points de l'espace de la forme $D + t(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ avec $t \in \mathbb{R}$. Une représentation paramétrique de Δ est donc :
$(x(t), y(t), z(t)) = (1,1,1) + t(-3,-3,-3) = (1-3t, 1-3t, 1-3t)$, où t parcourt $\mathbb{R}$.
Remarque. Une autre représentation paramétrique de Δ est obtenue en remarquant que $\overrightarrow{u}$ est aussi un vecteur directeur de Δ : $(x(t), y(t), z(t)) = (1+t, 1+t, 1+t)$.
5. Comme Δ est transverse à P, ils s'intersectent selon un point. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ le paramètre du point d'intersection pour le paramétrage de Δ obtenu ci-dessus. On a $(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \in P$, donc $x(t_0)+y(t_0)+z(t_0) = 1-3t_0+1-3t_0+1-3t_0 = 6$.

D'où $3 - 9t_0 = 6$, ce qui équivaut à $t_0 = -\frac{1}{3}$. Alors $1 - 3t_0 = 1 - 3(-\frac{1}{3}) = 2$ et $\Delta \cap P = \{(x(t_0), y(t_0), z(t_0))\} = \{(1 - 3t_0, 1 - 3t_0, 1 - 3t_0)\} = \{(2, 2, 2)\}$.
Remarque. On peut utiliser un autre paramétrage de Δ ou une autre équation cartésienne de P. On obtient alors un paramètre $t_1 \in \mathbb{R}$ pour le point d'intersection qui est a priori différent de t_0. En revanche, après avoir réinjecté t_1 dans le paramétrage on retrouve bien $(2, 2, 2)$ pour les coordonnées du point d'intersection. C'est heureux, vu que cette intersection ne dépend pas du choix d'un paramétrage pour Δ ou du choix d'une équation de P.

6. Par définition, le projeté orthogonal de D sur P est l'intersection de P avec la droite orthogonale à P passant par D. C'est donc l'unique élément $\Delta \cap P$ que l'on a déterminé à la question précédente. Le projeté orthogonal de D sur P a donc pour coordonnées $(2, 2, 2)$.

Exercice 3. On munit $\mathbb{R}^3$ d'un repère orthonormé direct et on décompose $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans ce repère : $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ et $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$. On calcule ensuite les coordonnées de chacun des membres de l'égalité à prouver.

$$
\begin{aligned}
u \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_2(v_1w_2 - v_2w_1) - u_3(v_3w_1 - v_1w_3) \\ u_3(v_2w_3 - v_3w_2) - u_1(v_1w_2 - v_2w_1) \\ u_1(v_3w_1 - v_1w_3) - u_2(v_2w_3 - v_3w_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_2v_1w_2 - u_2v_2w_1 - u_3v_3w_1 + u_3v_1w_3 \\ u_3v_2w_3 - u_3v_3w_2 - u_1v_1w_2 + u_1v_2w_1 \\ u_1v_3w_1 - u_1v_1w_3 - u_2v_2w_3 + u_2v_3w_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} &= (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1w_1v_1 + u_2w_2v_1 + u_3w_3v_1 - u_1v_1w_1 - u_2v_2w_1 - u_3v_3w_1 \\ u_1w_1v_2 + u_2w_2v_2 + u_3w_3v_2 - u_1v_1w_2 - u_2v_2w_2 - u_3v_3w_2 \\ u_1w_1v_3 + u_2w_2v_3 + u_3w_3v_3 - u_1v_1w_3 - u_2v_2w_3 - u_3v_3w_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_2v_1w_2 - u_2v_2w_1 - u_3v_3w_1 + u_3v_1w_3 \\ u_3v_2w_3 - u_3v_3w_2 - u_1v_1w_2 + u_1v_2w_1 \\ u_1v_3w_1 - u_1v_1w_3 - u_2v_2w_3 + u_2v_3w_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

On en déduit que $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$, ces deux vecteurs ayant les mêmes coordonnées dans un repère de l'espace.