Devoir Maison 1 - Corrigé

Exercice 1. 1. Déterminons d'abord la forme algébrique de a. On commence par multiplier le dénominateur et le numérateur par le conjugué du dénominateur, pour se ramener à une fraction où le dénominateur est réel. Puis on simplifie.

$$\begin{aligned} a =& \frac{3}{\sqrt{3}+i} = \frac{3(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{3\sqrt{3}-3i}{\left|\sqrt{3}+i\right|^2} = \frac{3\sqrt{3}-3i}{\sqrt{3}^2+1^2} = \frac{3\sqrt{3}-3i}{3+1} \\ =& \frac{3\sqrt{3}-3i}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i \end{aligned}$$

Passons à la forme trigonométrique de a. Le numérateur est déjà sous forme trigonométrique, vu que c'est un réel positif. Mettons le dénominateur sous forme trigonométrique.
Notons $r = \left|\sqrt{3}+i\right|$, on a $r^2 = \left|\sqrt{3}+i\right|^2 = \sqrt{3}^2 + 1 = 4$. Comme r est positif on a donc $r = 2$.
Notons maitenant θ l'argument principal de $\sqrt{3}+i$. (L'argument d'un complexe n'est bien défini qu'à 2π près, l'argument principal est l'unique argument appartenant à $]-\pi,\pi]$.) On a alors les relations suivantes : $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$.
Comme $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont tous les deux positifs, on en déduit que $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Or $\frac{\pi}{6}$ est l'unique élément de $[0, \frac{\pi}{2}]$ qui vérifie les conditions précédentes. Donc $\theta = \frac{\pi}{6}$ et $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$. Finalement,

$$a = \frac{3}{\sqrt{3}+i} = \frac{3}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{3}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

Remarque. Lorsqu'on a un produit ou un quotient à mettre sous forme trigonométrique, il est souvent plus simple de mettre chacun des termes sous forme trigonométrique, puis d'effectuer le produit ou le quotient.

2. Comme b est somme de deux complexes de même module, la méthode générale pour mettre b sous forme trigonométrique est de factoriser l'*arc moitié* (ici $e^{i\frac{\pi}{6}}$), pour faire apparaître un sinus ou un cosinus.

$$b = e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = e^{i\frac{\pi}{6}}(e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}) = e^{i\frac{\pi}{6}}\left(2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) ie^{i\frac{\pi}{6}} = ie^{i\frac{\pi}{6}}$$

On utilise ensuite le fait que la forme trigonométrique de i est $e^{i\frac{\pi}{2}}$, et on obtient $b = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2})} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

3. On commence par remarquer que $|c| = \left|\frac{(4+3i)(-2e^{i\frac{\pi}{49}})}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}\right| = \frac{|4+3i|\left|-2e^{i\frac{\pi}{49}}\right|}{\left|\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right|}$. On peut donc calculer la norme de chacun des termes dans cette expression puis en déduire la norme de c.

$$\begin{aligned} |4+3i| =& \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \\ \left|\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right| =& \sqrt{2}\,|1+i| = \sqrt{2}\sqrt{1+1} = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2 \\ \left|-2e^{i\frac{\pi}{49}}\right| =& |-2|\left|e^{i\frac{\pi}{49}}\right| = 2 \end{aligned}$$

D'où, $|c| = \frac{5\times 2}{2} = 5$.

Remarque. Comme à la question 1, il est plus facile de calculer la norme de chacun des termes indépendamment, et d'effectuer les produits et quotients ensuite.

Exercice 2. On rappelle que les polynômes à coefficients réels irréductibles sur $\mathbb{R}$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racine réelle. En particulier, un polynôme à coefficients réels de degré impair a au moins une racine réelle.

Ici on observe que $P(1) = 0$. Donc 1 est racine de P et $X - 1$ divise P. Écrivons P sous la forme $(X-1)(\alpha X^2 + \beta X + \gamma)$ et identifions les coefficients.

$$\begin{aligned} P =&(X-1)(\alpha X^2 + \beta X + \gamma) \\ =&\alpha X^3 + (\beta - \alpha)X^2 + (\gamma - \beta)X - \gamma \\ =&X^3 + -2X^2 + 2X - 1 \end{aligned}$$

Donc (α, β, γ) est solution du système : $\begin{cases} \alpha =1 \\ \beta - \alpha =-2 \\ \gamma - \beta =2 \\ -\gamma =-1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha =1 \\ \beta =-1 \\ \gamma =1 \end{cases}$. Et on a donc $P = (X-1)(X^2 - X + 1)$.

Remarque. Le système ci-dessus a une solution bien qu'il y ait plus d'équations que d'inconnues. C'est le cas parce que les quatre équations ne sont pas indépendantes. Par exemple la dernière ligne du système s'obtient en sommant terme à terme les trois premières.

Le polynôme $X - 1$ est irréductible, sur $\mathbb{R}$ comme sur $\mathbb{C}$, car il est de degré 1. Le polynôme $X^2 - X + 1$ n'est pas irréductible sur $\mathbb{C}$, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss. Factorisons ce polynôme sur $\mathbb{C}$. Si on trouve des racines réelles, alors cette factorisation sera aussi une factorisation sur $\mathbb{R}$, sinon c'est que $X^2 - X + 1$ est déjà irréductible sur $\mathbb{R}$.

Calculons le discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 = -3$. Comme $\Delta < 0$, on sait que les racines de $X^2 - X + 1$ sont deux racines non réelles conjuguées. Donc ce polynôme n'a pas de racine réelle, et est irréductible sur $\mathbb{R}$. Ainsi $P = (X-1)(X^2 - X + 1)$ est la factorisation en irréductibles de P sur $\mathbb{R}$.

Les racines complexes de $X^2 - X + 1$ sont les complexes conjugués $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. On a $\left|1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$. Par ailleurs, en notant θ l'argument principal de $1 + i\sqrt{3}$, on a $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit que $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, car son sinus *et* son cosinus sont positifs. Finalement, $\frac{\pi}{3}$ est l'unique élément de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dont le cosinus vaut $\frac{1}{2}$ et le sinus vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Finalement $\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, et $\frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \overline{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = \overline{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Donc on a la factorisation $X^2 - X + 1 = (X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{\pi}{3}})$, et la factorisation en irréductibles de P sur $\mathbb{C}$ est :

$$P = (X-1)(X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{\pi}{3}}).$$