Feuille d'exercices n° 7

Inversion locale et globale, fonctions implicites, extrema

1 Inversion locale et fonctions implicites

Exercice 1. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $|a| + |b| \leq r$ il existe une unique solution locale $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ au système d'équations suivant.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5x^2y^3 = a \\ x - y + \sin(x^6y^3) = b \end{cases}$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f : (x, y, z) \mapsto (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$. Montrer que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur son image, et que $f(\mathbb{R}^3)$ est un ouvert non trivial de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f : (x, y, z) \mapsto (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$.

1. Montrer qu'il existe un intervalle I contenant x_0 et une application $\phi : I \to \mathbb{R}^2$ tels que $\phi(x_0) = (y_0, z_0)$ et pour tout $x \in I$, $f(x, \phi(x)) = 0$.
2. On note $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ où ϕ_1 et $\phi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont les composantes de ϕ. Calculer $\phi_1'(x_0)$ et $\phi_2'(x_0)$.

Exercice 4. On considère la fonction $f :]-\infty, 1[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : (x, y) \mapsto x^3 - y^3 - 1$. Montrer, en utilisant le théorème des fonctions implicites, que :
pour tout $(x_0, y_0) \in]-\infty, 1[\times \mathbb{R}$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$, il existe un voisinage U de x_0 et une fonction $\phi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ vérifiant $\phi(x_0) = y_0$ et pour tout $x \in U$ $f(x, \phi(x)) = 0$.

Exercice 5. Soit $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (xy - z, x^2 + y + xe^z) \end{array}$, aussi notée (F_1, F_2) avec $F_1, F_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. On considère sa courbe de niveau 0 : $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = (0, 0)\}$.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrer que le théorème des fonctions implicites s'applique en tout point de C.
3. En déduire que C est le graphe d'une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$.
   Indication : on admet que pour tout réel x_0 fixé, il existe $(y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x_0, y_0, z_0) \in C$.
4. Déterminer la matrice jacobienne $J_\varphi(x)$ de φ en tout point $x \in \mathbb{R}$. En particulier, expliciter $J_\varphi(0)$.

Exercice 6. Soit $E = \mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus d. On le munit de la norme infinie sur les coefficients. C'est-à-dire, pour tout $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in E$, on a $\|P\| = \max_{0 \leq k \leq d} |a_k|$.
Soient $P_0 = c_0 + c_1X + \cdots + c_dX^d$ un polynôme de E et $x_0 \in \mathbb{R}$ une de ses racines, que l'on supposera simple.
Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $P \in E$ tel que $\|P - P_0\| < r$, le polynôme P admet une unique racine simple x_P dans $]x_0 - r; x_0 + r[$ et la fonction $P \mapsto x_P$ est de classe C^1.
Indication : on pourra définir $F : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $F : (P, x) \mapsto P(x)$.

Exercice 7. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y) \mapsto x^3 - 2xy + 2y^2 - 1$. Trouver la pente de la droite tangente à la courbe d'équation $f(x, y) = 0$ au point $(1, 1)$. Préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente en ce point.

Exercice 8. Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y, z) \mapsto x^2 - xy^3 - y^2 z + z^3$ et Σ sa surface de niveau 0 dans $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer l'équation du plan tangent à Σ au point $(1, 1, 1)$.
2. Vérifier qu'au voisinage du point $(1, 1, 1)$ cette surface est le graphe d'une fonction $z = g(x, y)$.
3. Écrire le pôlynome de Taylor d'ordre deux de g au point $(1, 1)$. Quelle est la matrice hessienne de g en ce point ?
4. Quelle est la position de la surface par rapport au plan tangent ?

2 Extrema

Exercice 9. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f : (x, y) \mapsto e^{x^2+xy+y^2}$. Justifier l'existence du développement de Taylor de f à l'ordre 2 au voisinage du point $(0, 0)$, le déterminer.

Exercice 10. On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f : (x, y) \mapsto x^3 + xy^2 - 2x^2 + 2$.

1. Vérifier que si D est une droite passant par $(0, 0)$, la restriction de f à D possède un maximum local à l'origine.
2. Établir si $(0, 0)$ est un point de maximum local.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application $(x, y) \mapsto 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4$.

1. Déterminer les extrema locaux de f.
2. Vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \leq 2(x^2 + y^2) - \frac{(x^2+y^2)^2}{4}$. En déduire que f est majorée par 4.
3. Trouver le maximum global de f et les points où il est atteint.
4. f admet-elle un minimum global ?

Exercice 12. Déterminer les bornes de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g : (x, y) \mapsto 3xy - 3x^2 - y^3$ sur le compact $K = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Exercice 13. Étudier les extrema des fonctions suivantes sous les contraintes indiquées.

1. $f : (x, y) \mapsto x + 2y$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 5$,
2. $f : (x, y, z) \mapsto (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2$ sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,
3. $f : (x, y, z) \mapsto xyz$ sous les contraintes $x + y + z = 1$ et $y - z = 1$.

Exercice 14. Soit $s \in \mathbb{R}_+$, et $D_s = \{(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid x_1 + ... + x_n = s\}$. Soit $f : (\mathbb{R}_+)^n \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par $f : (x_1, ..., x_n) \mapsto x_1 x_2 \cdots x_n$.

1. En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, trouver la valeur maximale atteinte par f dans l'ensemble D_s.
2. Déduire de la question précédente que, pour tous $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+$, on a l'inégalité :

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$