Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2014-2015

Maths III PMI - Analyse

Feuille d'exercices n° 6

CALCUL DIFFÉRENTIEL

---

1 Dérivées partielles et différentielle

Exercice 1. Étudier l'existence de la dérivée de la fonction $f : (x,y) \mapsto xy^2$ suivant le vecteur $v = (1,-2)$ au point $A = (2,1)$. Déterminer sa valeur si elle existe.

Exercice 2. Soit $\vec{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $\vec{G} : (x,y,z) \mapsto (x \sin y, y \sin x, z)$. Justifier l'existence et calculer $\operatorname{div}(\vec{G})$, $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{G})$ et $\overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}(\vec{G}))$.

Exercice 3. Étudier la continuité, ainsi que l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de la fonction suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2, & \text{si } |x| > y, \\ y^2, & \text{si } |x| \le y. \end{cases}$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y - y^3}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{en } (0,0). \end{cases}$$

1. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.
2. L'application f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{en } (0,0). \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0,0)$ mais n'y est pas différentiable.

Exercice 6. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimensions finies et $f : E \to F$ une fonction de classe C^1. Dans les cas suivants trouver la dimension de la matrice jacobienne de f.

1. f est une fonction réelle d'une variable réelle ($E = F = \mathbb{R}$).
2. f est une fonction vectorielle d'une variable réelle ($E = \mathbb{R},\ F = \mathbb{R}^p$).
3. f est une fonction réelle d'une variable vectorielle ($E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}$).
4. f est une fonction vectorielle d'une variable vectorielle ($E = \mathbb{R}^n,\ F = \mathbb{R}^p$).

À l'aide des coefficients de la matrice jacobienne de f, exprimer la différentielle de f en tout point de E.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable. Quel est le lien entre la dérivée $f'(a)$ de f en $a \in \mathbb{R}$ et sa différentielle au même point $df(a)$?

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Quel est le lien entre la différentielle de f en $a \in \mathbb{R}^n$ et le gradient de f au même point ?

Exercice 9. Soit une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On considère les assertions suivantes :

a. L'application f est continue en $(0,0)$.

b. Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues au voisinage de $(0,0)$.

c. L'application f est différentiable en $(0,0)$.

Rappeler les implications qui sont vraies entre ces propriétés. Montrer que ces implications ne sont pas des équivalences. On pourra utiliser les deux fonctions suivantes :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + y^2 \sin\left(\dfrac{1}{y}\right) & \text{si } xy \neq 0, \\ x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } y = 0 \text{ et } x \neq 0, \\ y^2 \sin\left(\dfrac{1}{y}\right) & \text{si } x = 0 \text{ et } y \neq 0, \\ 0 & \text{en } (0,0), \end{cases} \quad \text{et} \quad g : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{en } (0,0). \end{cases}$$

Exercice 10. Soit $f : (\mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f : (x,y) \mapsto 2x + 5y + x^2(\sqrt{y} + \sqrt{x})$.

1. En quels points f est-elle continue ?
2. En quels points admet-elle des dérivées partielles ?
3. Sur quel ensemble f est-elle de classe C^1 ?
4. En quels points est-elle différentiable ?
5. En quels points admet-elle des dérivées directionnelles ?

Exercice 11. On considère l'application :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{en } (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les calculer.
2. Montrer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que f est différentiable au point $(0,0)$.

2 Fonctions composées

Exercice 12. Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leurs matrices jacobiennes.

1. $f : (x,y) \mapsto e^{xy}(x+y)$,
2. $g : (x,y,z) \mapsto xy + yz + zx$,
3. $h : (x,y) \mapsto (y \sin x, \cos x)$.

Exercice 13. Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leurs différentielles.

1. $f : (x,y,z) \mapsto \left(\frac{x^2-z^2}{2}, \sin x \sin y\right)$,
2. $g : (x,y) \mapsto \left(xy, \frac{x^2}{2} + y, \ln(1+x^2)\right)$.

Exercice 14. Soit f une fonction différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On définit $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

Montrer que g est différentiable et exprimer $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 15.
1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable, déterminer la dérivée de $u : x \mapsto f(x, -x)$ et la différentielle de $g : (x, y) \mapsto f(y, x)$.
2. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, et $f : U \to F$ différentiable. Pour tout $a \in U$ et $v \in E$, dériver la fonction $t \mapsto f(a + tv)$ en $t = 0$.

Exercice 16. Soit $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^2$ (i.e. une application d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$) dérivable en 0. On suppose que $\gamma(0) = (1, 2)$ et $\gamma'(0) = (3, 4)$. Soit $f : (x, y) \mapsto e^{xy}$, calculer $(f \circ \gamma)'(0)$.

Exercice 17. Soient x et y deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Soit $z : t \mapsto f(x(t), y(t))$, déterminer z'.
Appliquer cette formule aux cas particuliers suivants :

1. $f : (x, y) \mapsto x^2 + 2xy + 4y^2$ avec $x : t \mapsto t$ et $y : t \mapsto e^{3t}$.
2. $f : (x, y) \mapsto xy^2 + x^2y$ avec $x : t \mapsto t^2$ et $y : t \mapsto \ln t$.

Exercice 18. On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définies par :

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = x^2 - y^2 \qquad \text{et} \qquad \forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ g(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z)$$

1. Soit $h = f \circ g$, expliciter h. Montrer que f, g et h sont de classe C^1 et écrire leurs jacobiennes.
2. Vérifier que $J_h(x, y, z) = J_f(g(x, y, z))J_g(x, y, z)$, où J_f, J_g et J_h désignent les matrices jacobiennes de f, g et h respectivement.

Exercice 19. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On pose $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R},\ f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Justifier que la quantité $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ a bien du sens pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, et la calculer.

Exercice 20. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et ne s'annulant pas. Montrer que l'application inverse $\dfrac{1}{f}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ et donner sa différentielle en tout point de U.