Feuille d'exercices n° 5

Limites et continuité des applications de plusieurs variables

1 Limites

Exercice 1. Soient $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f : (x,y) \mapsto \dfrac{2xy - y^2}{x^2 + y^2}$. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, étudier la limite en $(0,0)$ de la restriction de f à la droite d'équation $y = mx$. En déduire que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{1}$$

1. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, étudier la limite en $(0,0)$ de la restriction de f à la droite d'équation $y = mx$.
2. Calculer, si elle existe, la limite à l'origine de la restriction de f à la parabole d'equation $y = x^2$.
3. Montrer que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 3. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tel que $(0,0)$ est adhérent à Ω et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On peut considérer trois types de limites suivants :

A. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, B. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))$, C. $\displaystyle\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$.

1. En utilisant les fonctions f et g définies sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq 0\}$ par :

$$f : (x,y) \longmapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad g : (x,y) \longmapsto \frac{x}{x^2 + y^2},$$

démontrer les propositions ci-dessous.

   (a) Les limites (B) et (C) peuvent exister sans que la limite A existe.

   (b) Les limites (B) et (C) peuvent exister sans être égales.

   (c) Une de ces trois limites peut exister sans que les deux autres existent.

2. En considérant $h : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ définie par $h : (x,y) \mapsto x \sin\left(\frac{1}{y}\right)$, montrer que les limites (A) et (C) peuvent exister sans que la limite (B) existe.
3. Montrer que si les limites (A) et (B) existent alors elles sont égales.

Exercice 4. Étudier la limite au point de coordonnées $(0,0)$ de la fonction $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq 0\} \to \mathbb{R}$ définie par $(x,y) \mapsto \dfrac{\sin(xy)}{xy}$.

Exercice 5. Pour chacune des fonctions de deux variables suivantes, préciser le domaine de définition et calculer, si elle existe, la limite lorsque $(x,y) \to (0,0)$.

1. $(x,y) \mapsto \dfrac{\sqrt{|xy|}}{|x|+|y|}$,
2. $(x,y) \mapsto \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$,
3. $(x,y) \mapsto \dfrac{x^{\frac{1}{3}}y^2}{x^2+y^2+|x-y|}$,
4. $(x,y) \mapsto \dfrac{\cos(xy)-1}{x^2+y^2}$,
5. $(x,y) \mapsto \dfrac{x^2}{y\ln(y-x^2)}$,
6. $(x,y) \mapsto x^y$.

Exercice 6. Pour chacune des fonctions $g : \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi[\to \mathbb{R}$ suivantes, calculer (si elle existe) la limite de $g(\rho,\theta)$ lorsque ρ tend vers 0 à θ fixé. Préciser si cette limite est indépendante de θ, et si la convergence est uniforme en θ.

1. $g : (\rho,\theta) \mapsto \dfrac{\rho}{\sin(\theta)+3}$,
2. $$g : (\rho,\theta) \mapsto \begin{cases} \rho\ln(\rho\sin(\theta)) & \text{si } \theta \in]0,\pi[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déduire de ce qui précède la limite lorsque $(x,y) \to (0,0)$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall(\rho,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi[, \quad f(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta)) = g(\rho,\theta).$$

Exercice 7. En effectuant un passage en coordonnées polaires, calculer la limite des fonctions suivantes en $(0,0)$, si elle existe.

1. $f : (x,y) \mapsto \dfrac{y^3}{x^2+y^2}$,
2. $g : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}$.

Exercice 8. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier les limites lorsque $(x,y) \to (0,0)$ et lorsque $\|(x,y)\| \to +\infty$ de la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{(x^2+y^2+x+y+1)^\alpha}{x^2+y^2}$.

Exercice 9. En effectuant un passage en coordonnées polaires, étudier les limites lorsque $(x,y) \to (0,0)$ et lorsque $\|(x,y)\| \to +\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x\arctan(y)}{x^2+y^2+1}$,
2. $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$,
3. $f : (x,y) \mapsto (1+|x|+|y|)\sin(y^2)$,
4. $f : (x,y) \mapsto ye^x + \ln(|y|)$.

2 Continuité

Exercice 10. Soit $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y}{\sqrt{x^4+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue à l'origine.
2. f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 11. Étudier la continuité des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes.

1. $$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
2. $$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} x^2y & \text{si } x < y, \\ y & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. $$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{xy}\right) & \text{si } xy \neq 0, \\ 0 & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$
4. $$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} x^4 & \text{si } x^2 < y, \\ y^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 12. Sur quelles parties de $\mathbb{R}^2$ les formules suivantes définissent-elles une fonction continue ?

1. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.
2. $g(x,y) = \sin\left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right)$.

Démontrer que ces deux fonctions se prolongent par continuité au point $(0,0)$.

Exercice 13. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on appelle *ligne de niveau* k de f l'ensemble $f^{-1}(\{k\}) = \{(x,y) \in \Omega \mid f(x,y) = k\}$. Trouver l'ensemble de définition et les lignes de niveaux 0, 1, -1, 2 et 3 des fonctions $f : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$, $g : (x,y) \mapsto x^2+y^2$ et $h : (x,y) \mapsto \frac{y}{x}$. Représenter graphiquement ces lignes de niveaux.

Exercice 14. Pour chacune des fonctions suivantes tracer les lignes de niveau indiquées :

1. $f : (x,y) \mapsto \frac{x^2+y}{x+y^2}$, pour $k \in \{0,-1\}$,
2. $f : (x,y) \mapsto \frac{xy-x+y}{xy}$, pour $k \in \{1,2\}$,
3. $f : (x,y) \mapsto \frac{x^4+y^4}{8-x^2y^2}$, pour $k = 2$,
4. $f : (x,y) \mapsto x-y-|x-y|$, pour $k \in \mathbb{R}$,

Pour la dernière question, traiter séparément les cas $k=0$, $k>0$ et $k<0$.

Exercice 15. Soient f et g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ deux applications continues.

1. Montrer que l'image réciproque $f^{-1}(F)$ d'un fermé F de $\mathbb{R}^m$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
2. En déduire que l'image réciproque $f^{-1}(O)$ d'un ouvert O de $\mathbb{R}^m$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = g(x)\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
4. On suppose $m=1$, montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \le g(x)\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
5. On suppose $m=1$, montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) < g(x)\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 16. Établir si les fonctions suivantes sont bornées dans $\mathbb{R}^2$:

1. $f : (x,y) \mapsto (x+2y^2)\exp(-|xy|)$,
2. $f : (x,y) \mapsto \exp(\cos(1+xy))$,
3. $f : (x,y) \mapsto (x^4+y^2)\exp(-x^2-y^4)$.

Exercice 17. Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application continue telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $f(x+y) = f(x)+f(y)$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall q \in \mathbb{Q}$, $f(qx) = qf(x)$.
4. En déduire que f est une application linéaire.

3 Continuité des applications linéaires

Exercice 18 (Une forme linéaire non continue)**.** Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on note $\|f\| = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$ la norme 1 de f. Pour tout $c \in [0;1]$, on définit une application de E dans $\mathbb{R}$ par $\delta_c : f \mapsto f(c)$. Montrer que δ_c est une forme linéaire sur E mais qu'elle n'est pas continue.

Exercice 19. Soit E un espace vectoriel sur lequel toutes les normes sont équivalentes. Soient $\|\cdot\|$ une norme sur E et f une forme linéaire sur E.

1. Montrer que $x \in E \longmapsto \|x\| + |f(x)|$ définit une norme sur E.
2. En déduire que f est continue.

Exercice 20 (Norme d'opérateur)**.** Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on note $\|f\| = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$ la norme 1 de f. Soit $\mu : E \to E$ définie par : $\forall x \in [0;1]$, $\mu(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

1. Montrer que μ est bien définie et que μ est une application linéaire continue de E dans lui-même.
2. Soit (f_n) la suite de fonctions définie par $f_n(t) = n(1-t)^{n-1}$ pour tout $t \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n\|$ et $\|\mu(f_n)\|$ et en déduire la norme triple de μ.

Exercice 21. On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, définie pour $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ par $\|P\|_\infty = \max_{0\leq k\leq n} |a_k|$. Pour $c \in \mathbb{R}$, on définit la forme linéaire suivante sur $\mathbb{R}[X]$: $\varphi_c : P \mapsto P(c)$. Pour quelles valeurs de c la forme linéaire φ_c est-elle continue ? Dans ce cas, déterminer la norme de φ_c.

Exercice 22. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_d[X]$ on ait :

$$P(-1)^2 + P'(0)^2 + P''(1)^2 \leq C \int_{-1}^{1} P(t)^2\,\mathrm{d}t.$$