Feuille d'exercices n° 4

Topologie des espaces vectoriels normés

1 Ouverts et fermés

Exercice 1. Démontrer les affirmations suivantes en utilisant la définition d'un ouvert et d'un fermé.

1. $]a, b[$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ ($a < b$).
2. $[a, b]$ est fermé dans $\mathbb{R}$ ($a < b$).
3. $[a, b[$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$ ($a < b$).
4. $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.
5. $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.
6. Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une réunion de boules ouvertes.
7. Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ contenant une boule ouverte, alors $F = \mathbb{R}^n$.

Exercice 2. Déterminer si les ensembles suivantes sont ouverts, fermés ou ni ouverts ni fermés :

1. l'intervalle $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < 3, y = 0\}$ dans $\mathbb{R}^2$,
2. le cercle unité : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$,
3. le disque unité : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel normé. On fixe $x_0 \in E$ et on définit $f : E \to E$ par $f : u \mapsto x_0 + u$.

1. Montrer que si $U \subset E$ est une partie ouverte, alors $f(U)$ est aussi une partie ouverte de E.
2. Montrer que si $F \subset E$ est une partie fermée, alors $f(F)$ est aussi une partie fermée de E.

Exercice 4.

1. Montrer que si $\{U_i\}_{i=1}^{I}$ est une famille finie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ alors $\bigcap_{i=1}^{I} U_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. Déterminer $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-1/n, 1/n[$ et en déduire que le résultat précédent ne se généralise pas lorsque l'on considère une famille infinie d'ouverts.
3. Enoncer (et démontrer) les résultats analogues à ceux qui précèdent concernant l'union d'une famille de fermés.

Exercice 5. Démontrer que $\mathbb{Z}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$, une première fois en observant que son complémentaire est ouvert, et une seconde par la caractérisation séquentielle des parties fermées.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel normé. Démontrer que l'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte de même rayon.

Exercice 7. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour une partie X de E, on note $\mathring{X}$ l'intérieur de X. Soient A, B deux parties de E.

1. Si $A \subset B$, montrer que $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.
2. Comparer les ensembles $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$ et $\mathring{A} \cap \mathring{B}$
3. Comparer les ensembles $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$ et $\mathring{A} \cup \mathring{B}$.

Exercice 8. Déterminer l'intérieur des ensembles suivants. Déterminer également s'ils sont ouverts, fermés ou ni ouverts ni fermés.

1. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
2. $B = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 9 (Voisinages)**.** Soit $P \in \mathbb{R}^n$, on dit qu'une fonction f vérifie une certaine propriété *sur un voisinage de* P si cette propriété est satisfaite sur un ouvert contenant P.

1. Etablir si les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes sont positives au voisinage de 0.

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 + x\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2. Etablir si les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont définies au voisinage de 0.

$$f(x, y) = \sqrt{x + y}, \qquad \text{et} \qquad f(x, y) = \ln(\cos(x^2 + y^2)).$$

2 Compacts

Exercice 10. Soient E un espace vectoriel normé et $A, B \subset E$. On définit $A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que si A est compact et B fermé dans E alors $A + B$ est fermé dans E.
2. Montrer que si A et B sont compactes alors $A + B$ l'est aussi.
3. Soient $A = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$. Montrer que A et B sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ mais que $A + B$ n'en est pas un.

Exercice 11. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $K \subset E$ un compact de E. Soit F un fermé de E tel que $F \subset K$. Montrer que F est compact.