Feuille d'exercices n° 3

Espaces vectoriels normés

1 Normes et distances

Exercice 1 (Les normes usuelles de $\mathbb{R}^n$)**.** On définit sur $\mathbb{R}^n$ les applications suivantes : $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|\,.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.
2. On s'intéresse ici à la norme $\|\cdot\|_2$ et on se propose de démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour cela, soient $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit le polynôme de degré 2 :

$$P_{xy} : t \to \sum_{i=1}^{n} (x_i + ty_i)^2.$$

   (a) Quelle condition sur le discriminant de P_{xy} traduit le fait que P_{xy} est toujours à valeurs positives ?

   (b) En déduire l'inégalité dite de Cauchy-Schwarz : $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$.

   (c) En déduire que $\|\cdot\|_2$ vérifie l'inégalité triangulaire et constitue une norme sur $\mathbb{R}^n$.
3. Etablir les inégalités suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

   (a) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty$, (b) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$, (c) $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$.

   En conclure que les trois normes étudiées sont équivalentes.
4. Représenter dans $\mathbb{R}^2$ les boules centrées à l'origine et de rayon 1 pour chacune des trois normes ci-dessus.

Exercice 2. On considère les applications suivantes :

$$\begin{array}{rcl} N_1 : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & |x_1 + x_2| + |x_1| \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} N_2 : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & \max(|x_1 + 3x_2|\,, |x_1 - x_2|). \end{array}$$

1. Vérifier que chacune de ces applications définit une norme.
2. Tracer la boule unité autour de l'origine pour N_1 et pour N_2.

Exercice 3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pour que l'application

$$\begin{array}{rccl} N_A & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \ \mathbb{R} \\ & & (x_1, x_2) & \longmapsto \ |ax_1 + bx_2| + |cx_1 + dx_2| \end{array}$$

définisse une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Les applications suivantes sont-elles des normes ?

1. $N : \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$
2. $N : \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|^2$
3. $N : \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \sup_{x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]} |f(x)|$
4. $N : \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$
5. $N : \mathcal{C}([0;2\pi],\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_0^{2\pi} |f(t)\sin(t)|\,\mathrm{d}t$
6. $N : \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$
7. $N : \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right|$
8. $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\right)^2$
9. $N : \mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, où $\mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Pour tout $f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$, on définit :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t, \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t}, \qquad \text{et} \qquad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |f(t)|\,.$$

1. On a vu dans l'exercice précédent que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$. Montrer que $\|\cdot\|_2$ aussi.
2. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$, on a $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$, mais que ces trois normes ne sont pas équivalentes. *Indication :* on pourra considérer les fonctions $f_n : x \mapsto x^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel. Pour $x, y \in E$ on définit :

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $d(\cdot,\cdot)$ définit une distance.
2. Montrer que cette distance n'est induite par aucune norme.

Exercice 7 (Métriques et espaces vectoriels normés)**.** Soit d l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|. \end{array}$$

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.
2. La distance est-elle induite par une norme ?
3. On munit $\mathbb{R}$ de la distance d. Montrer que $\mathbb{R}$ est borné. Calculer son diamètre. On rappelle que le diamètre d'une partie $A \in \mathbb{R}^n$ bornée est défini par : $\operatorname{diam}(A) = \sup_{(x,y)\in A\times A} d(x,y)$.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, si on note A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on notera $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ ses coefficients. On définit une application N_∞ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $N_\infty : A \longmapsto \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$.

1. Montrer que N_∞ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a : $N_\infty(AB) \leq nN_\infty(A)N_\infty(B)$.
3. Soit N une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall\ A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad N(AB) \leq cN(A)N(B).$$

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$\forall\ P \in E, \quad \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t \geq \lambda \sup_{t\in[0;1]} |P(t)|\,.$$

2 Suites et séries d'éléments d'un espace vectoriel normé

Exercice 10. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de E. Montrer que l'ensemble $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est borné.

Exercice 11. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. On suppose que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ des puissances de A converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice B. Que dire de B ?

Exercice 12. Soit $(E, \|\cdot\|)$ une espace vectoriel normé de dimension finie. Une application $f : E \to E$ est dite *contractante* si il existe $k \in [0; 1[$ tel que : $\forall\, x, y \in E,\ \|f(x) - f(y)\| \leq k\,\|x - y\|$.

1. Soient $f : E \to E$ une application contractante et $x_0 \in E$. On définit par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme x_0 par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$.
   (a) Montrer que la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$ converge dans E.
   (b) En déduire que f admet un point fixe et que celui-ci est unique.
2. Soit $f : E \to E$, montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p soit contractante alors f admet encore un unique point fixe.