**Feuille d'exercices n° 2**

Séries numériques

# 1 Quelques séries simples

**Exercice 1.** Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$,
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$,
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

*Indication :* utiliser Taylor-Lagrange entre 0 et 1, pour exp dans 2, et pour $x \mapsto -\ln(1+x)$ dans 3.

**Exercice 2.** Étudier la convergence des séries $\displaystyle\sum \frac{n^2}{n^2+1}$, et $\displaystyle\sum\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

# 2 Séries à termes positifs

**Exercice 3.** Étudier la convergence de la série de terme général $u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{n+1}{n^3-7}$,
2. $u_n = \dfrac{n+1}{n^2-7}$,
3. $u_n = \dfrac{n+1}{n-7}$,
4. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,
5. $u_n = \dfrac{2^n+3^n}{n^2+5^n}$,
6. $u_n = \dfrac{1}{n^{(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}}$,
7. $u_n = \dfrac{1}{\ln(n^2+2)}$,
8. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$,
9. $u_n = \dfrac{n}{2^n}$,
10. $u_n = \dfrac{n^{100\,000}}{2^n}$,
11. $u_n = \dfrac{1}{n!}$,
12. $u_n = \dfrac{n^{100\,000}}{n!}$,
13. $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$,
14. $u_n = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n)!}$,
15. $u_n = \left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$,
16. $u_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$,
17. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

**Exercice 4.**

1. Trouver une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln^3(x)}$.
2. Montrer que pour $a > 1$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^3(x)}$ est convergente.
3. On pose $u_n = \dfrac{1}{n\ln^3(n)}$ pour $n \geq 2$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
4. Donner un encadrement de $R_n$, le reste d'ordre $n$ de $\sum u_n$.

**Exercice 5.** Déterminer la nature et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n-2}{n^3+3n^2+2n}$.

**Exercice 6.**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sqrt{n}2^{-n}$, et $v_n = u_n - u_{n+1}$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \sim_{n\to+\infty} \alpha v_n$.
2. Trouver un équivalent simple de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\sqrt{k}2^{-k}$ lorsque l'entier $n$ tend vers l'infini.

**Exercice 7** (Cas limite de la règle de d'Alembert)**.** Soit, pour $n \geq 1$ et $a > 0$, la suite $u_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$.

1. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_n u_n$ lorsque $a \neq e$.
2. Lorsque $a = e$, prouver que, pour $n$ assez grand, $u_{n+1}/u_n \geq 1$. Que dire de la nature de la série $\displaystyle\sum_n u_n$ ?

## 3 Séries à termes quelconques

**Exercice 8.** Étudier la convergence de la série de terme général $u_n$ dans les cas suivants :

1. (a) $u_n = (-1)^n \dfrac{n^3}{n!}$, (b) $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$ avec $a \in \mathbb{C}$, (c) $u_n = na^{n-1}$ avec $a \in \mathbb{C}$,
2. (a) $u_n = (-1)^n \dfrac{1}{\ln(n+1)}$, (b) $u_n = \sin\left(\left(n + \dfrac{1}{n}\right)\pi\right)$, (c) $u_n = (-1)^n(\sqrt{1+n} - \sqrt{n})$.

**Exercice 9** (Une erreur classique)**.** 1. Montrer que la série $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

2. Démontrer que $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
3. Étudier la convergence de la série $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.
4. Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice ?

**Exercice 10** (Théorème d'Abel ou IPP discrète)**.** On considère deux suites complexes $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$. On s'intéresse à la convergence de la série $\sum_n u_n v_n$. Pour $n \geq 0$, on note $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Montrer que, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq q$, on a :
$$\sum_{k=p}^{q} u_k v_k = s_q v_q - s_{p-1} v_p + \sum_{k=p}^{q-1} s_k (v_k - v_{k+1}).$$
2. Montrer que si la suite $(s_n)_n$ est bornée, et si la suite $(v_n)_n$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, décroissante et de limite nulle, alors $\sum_n u_n v_n$ est convergente.

**Exercice 11.** Étudier la convergence de la série de terme général $u_n$ dans les deux cas suivants : $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n^2}$ et $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$. Pour l'étude de cette dernière, on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent.

**Exercice 12.** 1. En linéarisant $\cos^2(n)$, montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{\cos^2(n)}{n}$ diverge.

2. En utilisant un développement limité, montrer que la série de terme général $u_n = \sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$, pour $n \geq 1$, diverge.

**Exercice 13.** Étudier la convergence de la série de terme général $u_n$ dans les deux cas suivants :

1. $u_n = n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$,
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$.

**Exercice 14.** Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(n-k)!k!}$.

**Exercice 15.** Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^{n-k}}{k! 2^{n-k}}$.

**Exercice 16.** Les séries suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\sum \left(\dfrac{1}{n^{3/4}} + \dfrac{\sin(2n)}{n^{3/4}}\right)$,
2. $\sum \left(\dfrac{1}{n^{3/4}} + \dfrac{1 - n^{(n-3/4)}}{n^n}\right)$,
3. $\sum \left(\sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4}}} - \exp\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n^{3/4}}\right)\right)$.