Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2014-2015

Math III - PMI Durée : 1h30

Partie commune - Devoir numéro 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle**.

Le sujet comporte deux parties. **Il est demandé aux candidats de traiter la partie Analyse et la partie Algèbre sur des copies distinctes.** *Les exercices sont indépendants.*

Le sujet étant long, le barème comportera, a priori, plus de 20 points.

1 Analyse

Exercice 1. Pour tout $n \geq 2$ on pose $u_n = \dfrac{1}{n^2-1}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ converge et calculer la valeur de la somme. *Indication :* penser à décomposer en éléments simples une fraction rationnelle bien choisie.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \exp\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2n} + v_n$ avec $v_n = O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
2. Pour chacune des séries $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $\sum \dfrac{1}{2n}$ et $\sum v_n$, préciser si la série est divergente, absolument convergente ou semi-convergente.
3. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 3. Soient $f : \begin{array}{ccc}]1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x\ln(x)} \end{array}$ et, pour tout $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

1. Redémontrer, *sans utiliser le critère de Bertrand*, que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n \geq \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geq u_{n+1}$.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge et que $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} u_n \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(N))$.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}_d[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à d. Pour tout $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in E$ on pose $N_1(P) = \displaystyle\int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t$ et $N_2(P) = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{d} {a_k}^2}$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E.
2. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall\, P \in E, \qquad \sqrt{\sum_{k=0}^{d} {a_k}^2} \leq C\left(\int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t\right).$$

2 Algèbre

Exercice 5. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer les valeurs de x pour lesquels la matrice suivante de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ n'est pas inversible :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ a & x & a+x & 2a+2x \\ a & x & b & a+b+x \\ a & x & b & c \end{pmatrix}.$$

Indication : On pourra calculer le déterminant de cette matrice en faisant des opérations élémentaires.

Exercice 6. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A + M) = \det(A) + \det(M)$. Le but de cet exercice est de montrer que $A = 0$.

1. Montrer que $\det(A) = 0$.
2. Par l'absurde, on suppose $A \neq 0$.
   (a) Justifier qu'il existe un vecteur $X_0 \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX_0 \neq 0$.
   (b) Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $PX_0 = -AX_0$.
   (c) Montrer que cela conduit à une absurdité.

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On suppose que u est nilpotent (i.e. il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$). On se propose de montrer que u possède une unique valeur propre qui est 0. On pose $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid u^k = 0\}$.

1. Dans cette question, on va montrer que 0 est une valeur propre de u.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(u^{p-1}) \subset \ker(u)$.
   (b) Justifier que $\mathrm{Im}(u^{p-1}) \neq \{0\}$.
   (c) Déduire de ce qui précède que 0 est une valeur propre de u.
2. Dans cette question, on va montrer qu'il ne peut y avoir d'autres valeurs propres que 0.
   (a) Soit λ une valeur propre de u. Montrer que λ^p est une valeur propre de u^p.
   (b) En déduire que λ est nulle.