Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2014-2015

Math III - PMI Durée : 1h30

Partie commune - Devoir numéro 2 - Corrigé

Exercice 1. Pour tout $n \geq 2$, $u_n \geq 0$. Par ailleurs $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge par Riemann. Donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

On a $\frac{1}{X^2-1} = \frac{1}{(X-1)(X+1)}$. D'après le théorème de décompostion en éléments simples, il existe des réels a et b tels que $\frac{1}{(X-1)(X+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1}$. En multipliant cette relation par $(X-1)$ et en évaluant en 1 on obtient $a = \frac{1}{2}$. De même, en multipliant la relation précédente par $(X+1)$ puis en évaluant en -1 on obtient $b = -\frac{1}{2}$. Finalement,

$$\frac{1}{X^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1}\right).$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 2$,

$$\sum_{n=2}^{N} u_n = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{N+1}\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{3}{4}.$$

Donc $\sum_{n\geq 2} u_n = \frac{3}{4}$.

Exercice 2. 1. On fait un développement limité de u_n. Lorsque $n \to +\infty$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$. Donc

$$u_n = \exp\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - 1 = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 + O\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3\right) - 1 = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Posons $v_n = u_n - \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2n}\right)$. Le calcul précédent montre que $v_n = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ et $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2n} + v_n$ comme attendu.

2.
   - $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge par Riemann. Par ailleurs, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 en décroissant lorsque $n \to +\infty$. Donc $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le théorème des séries alternées. Cette série est donc semi-convergente.
   - $\sum \frac{1}{2n}$ diverge par le critère de Riemann.
   - $v_n = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ donc en particulier $|v_n| = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$. Par le critère de Riemann, la série de terme général $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge. Donc $\sum |v_n|$ converge par le théorème de comparaison des séries à termes positifs. $\sum v_n$ est donc absolument convergente.

3. La série de terme général $\frac{1}{2n}$ est divergente et à termes positifs, donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. En revanche, la suite des sommes partielles des séries de termes généraux $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et v_n convergent. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n} + \sum_{n=1}^{N} v_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\infty$. Donc $\sum u_n$ diverge.

Exercice 3. 1. Pour tout $A > 1$, $\int_2^A f(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^A \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = [\ln(\ln(t))]_2^A = \ln(\ln(A)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty$. Donc l'intégrale impropre $\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

2. f est dérivable sur son domaine de définition, et pour tout $x \in]1; +\infty[$, $f'(x) = -\frac{\ln(x)+1}{x^2\ln(x)^2} < 0$. Donc f est strictement décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, pour tout $x \in [n; n+1]$ on a : $f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$, par décroissance de f. En intégrant cette relation sur l'intervalle $[n; n+1]$ (qui est de longueur 1), on obtient :

$$u_n = f(n) \geq \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geq f(n+1) = u_{n+1}. \tag{1}$$

3. Soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, en sommant les inégalités précédentes (1) on obtient :

$$\sum_{n=2}^{N} u_n \geq \sum_{n=2}^{N} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(2)) \qquad \text{et,}$$

$$\sum_{n=3}^{N} u_n = \sum_{n=2}^{N-1} u_{n+1} \leq \sum_{n=2}^{N-1} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^{N} f(t)\,\mathrm{d}t = \ln(\ln(N)) - \ln(\ln(2)).$$

Donc $$\ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(2)) \leq \sum_{n=2}^{N} u_n \leq \ln(\ln(N)) - \ln(\ln(2)) + u_2.$$

Par ailleurs, $\ln(\ln(N+1)) = \ln\left(\ln(N) + \ln\left(1+\frac{1}{N}\right)\right) = \ln(\ln(N)) + \ln\left(1 + \frac{\ln(1+o(1))}{\ln(N)}\right) \sim \ln(\ln(N))$, et les constantes sont $o(\ln(\ln(N)))$. Dans la double inégalité ci-dessus, les termes de gauche et de droite sont donc tous les deux équivalents à $\ln(\ln(N))$ lorsque $N \to +\infty$. Donc $\sum_{n=2}^{N} u_n \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(N))$, et en particulier la série de terme général u_n diverge.

Exercice 4. 1. **(Homogénéité)** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in E$. On a :

$$N_1(\lambda P) = \int_0^1 |\lambda P(t)|\,\mathrm{d}t = |\lambda| \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t = |\lambda|\, N_1(P)$$

$$N_2(\lambda P) = N_2\left(\sum_{k=0}^{d} (\lambda a_k) X^k\right) = \sqrt{\sum_{k=0}^{d} \lambda^2 a_k^2} = |\lambda|\, N_2(P).$$

(Définition) Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in E$,

$$N_1(P) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow \forall\, t \in [0;1],\ |P(t)| = 0 \text{ (car } t \mapsto |P(t)| \text{ est continue et positive sur } [0;1])$$
$$\Leftrightarrow P = 0 \text{ (car un polynôme non nul de degré au plus } d \text{ s'annule au plus } d \text{ fois sur } \mathbb{R}),$$

$$N_2(P) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{d} a_k^2 = 0 \Leftrightarrow \forall\, k \in \{1, \ldots, d\},\ a_k = 0 \Leftrightarrow P = 0.$$

(Inégalité triangulaire) Soient $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{d} b_k X^k \in E$. On a :

$$N_1(P+Q) = \int_0^1 |P(t) + Q(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 (|P(t)| + |Q(t)|)\,\mathrm{d}t = N_1(P) + N_1(Q)$$

en appliquant pour tout $t \in [0;1]$ l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ pour $|\cdot|$. Par ailleurs,

$$N_2(P+Q)^2 = \sum_{k=0}^{d} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=0}^{d} a_k^2 + 2\sum_{k=0}^{d} a_k b_k + \sum_{k=0}^{d} b_k^2 \leq \sum_{k=0}^{d} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=0}^{d} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{d} b_k^2} + \sum_{k=0}^{d} b_k^2$$

par Cauchy-Schwarz, appliqué au second terme. Donc

$$N_2(P+Q)^2 \leq N_2(P)^2 + 2N_2(P)N_2(Q) + N_2(Q)^2 = (N_2(P) + N_2(Q))^2.$$

On obtient donc $N_2(P+Q) \leq N_2(P) + N_2(Q)$ en prenant la racine carrée de cette expression.

2. L'espace E est de dimension finie $d+1$, donc toutes les normes sur E sont équivalentes. En particulier, N_1 et N_2 sont équivalentes et il existe $C > 0$ telle que : $\forall\, P \in E,\ N_2(P) \leq C N_1(P)$. C'est l'inégalité demandée.

Exercice 5. En effectuant les opérations suivantes $C_4 \leftarrow C_4 - C_1 - C_2 - C_3$, $C_3 \leftarrow C_3 - C_1 - C_2$, $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, on obtient une matrice triangulaire inférieure dont le déterminant est $(x-a)(b-a-x)(c-b-x-a)$. Ainsi la matrice de départ est non-inversible si et seulement si $x \in \{a, b-a, c-b-a\}$.

Exercice 6. 1. L'hypothèse implique $\det(A+A) = \det(A) + \det(A)$. Ainsi $\det(2A) = 2\det(A)$ ou encore $2^n \det(A) = 2\det(A)$ ou encore $(2^n - 2)\det(A) = 0$. Or $n \geq 2$ donc $2^n - 2 \neq 0$ d'où $\det(A) = 0$.

2. (a) La matrice A est non nulle, donc l'une des colonnes C_i de cette matrice est non nulle. Si on note X_0 le vecteur colonne formé de 0 et d'un 1 à la position i alors $A \cdot X_0 = C_i \neq 0$.

   (b) Notons $Y_0 = -AX_0$. Soient $X_0, X_2, \dots, X_n$ et $Y_0, Y_2, \dots, Y_n$ deux bases de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ obtenues par application du théorème de la base incomplète. Soit alors ϕ l'endormorphisme de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ tel que $\phi(X_i) = Y_i$. Cet endomorphisme est en fait un isomorphisme car il envoie une base sur une base. Notons P la matrice de passage entre la base des X_i et celle des Y_i. La relation $\phi(X_0) = Y_0$ implique la relation matricielle $P \cdot X_0 = Y_0 = -AX_0$.

   (c) Le résultat de la question précédente entraine alors : $(P + A) \cdot X_0 = 0$ avec $X_0 \neq 0$. Par conséquent, la matrice $A + P$ n'est pas inversible et donc $\det(A+P) = 0$. Or par hypotèse et par la question 1, $\det(A+P) = \det(A) + \det(P) = \det(P)$. On a donc $\det(P) = 0$ ce qui contredit le fait que P est inversible.

Exercice 7. 1. (a) Soit $y \in \mathrm{Im}(u^{p-1})$. Il existe donc $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) = y$. On a alors $u(y) = u(u^{p-1}(x)) = u^p(x) = 0(x) = 0$ d'où $y \in \ker(u)$.

   (b) Si $\mathrm{Im}(u^{p-1})$ était nul alors l'application u^{p-1} serait nulle ce qui contredirait la défintion de p.

   (c) Les deux questions précédentes impliquent $\ker(u) \neq \{0\}$ ce qui est équivalent au fait que 0 est une valeur propre de u.

2. (a) Soit $x \neq 0$ un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ. Par une récurrence simple, on montre que $u^k(x) = \lambda^k x$ quelque soit l'entier $k \geq 1$. C'est en particulier le cas pour $k = p$ d'où l'on peut conclure que λ^p est une valeur propre de u^p.

   (b) En reprenant les notations de la question précédente, on obtient $u^p(x) = \lambda^p \cdot x$. Or, par hypothèse, $u^p = 0$ donc $\lambda^p \cdot x = 0$. Le vecteur x étant non nul, cela entraine $\lambda^p = 0$ puis $\lambda = 0$.