

Exercice 1. Soit f la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par : $f : (x; y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$.

1. Pour tout point $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, calculer le gradient ∇f et le laplacien Δf de f en $(x; y)$.
2. Déterminer les points critiques de f .
3. Quelle est la nature de ces points critiques (maximum, minimum ou point col)? Justifier soigneusement.
4. La fonction f admet-elle un maximum global? Admet-elle un minimum global?
5. Donner le développement de Taylor de f à l'ordre 2 au point de coordonnées $(-1; 2)$.
6. Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par la formule : $\gamma(t) = (x(t); y(t)) = (t; t^2)$. Calculer la dérivée γ' de γ en tout point $t \in \mathbb{R}$.
7. En déduire la valeur de $\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}$ en tout point $t \in \mathbb{R}$.