FICHE TD 9 - THEOREMES DE STOKES ET DE GAUSS

Exercice 1

1. Soit C une courbe fermée et non-intersectante de $\mathbb{R}^2$ et $l : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ une paramétrisation de C. On note D le sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^2$ sous-tendu par C. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction scalaire et $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle. Ecrire toutes les intégrales possibles que vous pouvez définir avec ces objets.
2. Même question avec S une surface fermée plongée dans $\mathbb{R}^3$, B son intérieur, $\vec{\sigma} : D \to S$ une paramétrisation de S (avec D un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$), $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction scalaire et $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle.

Exercice 2 Soit D le disque de rayon R dans $\mathbb{R}^2$, et soit $\vec{\sigma} : D \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$D \ni (x,y) \mapsto \vec{\sigma}(x,y) = (x, y, x^2 - y^2) \in \mathbb{R}^3.$$

Vérifier le théorème de Stokes pour le champ de vecteurs $\vec{V}$ défini par $\vec{V}(x,y,z) = x\ \vec{e}_1 + y\ \vec{e}_2 + z\ \vec{e}_3$.

Exercice 3 Soit S la demi-sphère supérieur dans $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire

$$S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } z \geq 0\big\}.$$

Vérifier le théorème de Stokes pour le champ de vecteurs $\vec{V}$ défini par $\vec{V}(x,y,z) = \vec{e}_1 + xz\ \vec{e}_2 + xy\ \vec{e}_3$.

Exercice 4 Soit S la sphère de rayon R dans $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire

$$S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R\big\}.$$

Calculer le flux de $\vec{V}$ à travers S pour les deux champs de vecteurs suivants :

1. $\vec{V}(x,y,z) = x^3\ \vec{e}_1 + y^3\ \vec{e}_2 + z^3\ \vec{e}_3$,
2. $\vec{V}(x,y,z) = x^2\ \vec{e}_1 + y^2\ \vec{e}_2 + z^2\ \vec{e}_3$.