Université Claude Bernard Lyon 1 — PCSI UE Math2
Printemps 2013 — Responsable : Johannes Kellendonk

FICHE TD 8 - THM DE GREEN ET INTEGRALES DE SURFACE DANS $\mathbb{R}^3$

Exercice 1 a) Soit $\vec{U}$ un champ vectoriel sur $\mathbb{R}^2$ défini par $\vec{U}(x,y) = U_1(x,y)\ \vec{e}_1 + U_2(x,y)\ \vec{e}_2$, avec $U_1(x,y) = 2x-y$ et $U_2(x,y) = x+y$. On définit également f une fonction scalaire sur $\mathbb{R}^2$ par $f = \partial_1 U_2 - \partial_2 U_1$.

1. Calculer la circulation de $\vec{U}$ le long du cercle $\mathcal{C}$ de centre $(0,0)$ et rayon R, parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
2. Calculer l'intégrale de f sur le disque D de centre $(0,0)$ et rayon R, et vérifier ainsi le théorème de Green.

b) Réaliser le même travail en considérant le champ vectoriel $\vec{U}$ défini par les fonctions $U_1(x,y) = 2xy - x^2$ et $U_2(x,y) = x + y^2$, et pour la boucle fermée $\mathcal{C}$ constituée par les deux arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$ dans le quart de plan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$.

Exercice 2 Soit l'ensemble

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}.$$

1. Dessiner D.
2. Calculer de deux façons différentes l'intégrale

$$I = \int_D (x-y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y,$$

   (a) en utilisant le changement de variables : $\begin{cases} x = 2r\cos(\theta) \\ y = 3r\sin(\theta)\ ; \end{cases}$

   (b) en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 3 Calculer l'intégrale de surface $\int_S f\ dA$, où S est la surface paramétrée par

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad z = h\theta \qquad \text{avec } r \in [0,R], \theta \in [0,\pi] \text{ et } h, R > 0,$$

et où f est une fonction scalaire définie par $f(x,y,z) = xz$.

Exercice 4 Soit $\vec{E}$ le champ de vecteur dans $\mathbb{R}^3$ défini par $\vec{E}(x,y,z) = y^2\ \vec{e}_1 + z\ \vec{e}_2$.

1. Calculer la circulation de $\vec{E}$ le long du segment de droite orienté reliant l'origine au point $(1,1,1)$.
2. Calculer le flux de $\vec{E}$ à travers la surface définie par $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ et } x+y+z = 1\}$.

Exercice 5 On rappelle que la sphère de rayon R centrée à l'origine est paramétrée par

$$[0,2\pi[\ \times\ ]-\pi/2,\pi/2[\ \ni\ (\theta,\varphi) \mapsto \big(R\cos(\theta)\cos(\varphi), R\sin(\theta)\cos(\varphi), R\sin(\varphi)\big)\ \in\ \mathbb{R}^3.$$

Soit Σ l'intersection de la sphère avec l'ensemble $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, et soit $\vec{E}(x,y,z) = z\,\vec{e}_3$ un champ vectoriel sur $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer le flux de $\vec{E}$ à travers Σ,
2. Calculer la circulation de $\vec{E}$ le long des bords de Σ.