FICHE TD 7 - INTEGRALES CURVILIGNES

Exercice 1 La *spirale logarithmique* est définie par l'application

$$\vec{\ell} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (e^{at}\cos t, e^{at}\sin t). \end{array}$$

Dans cet exercice nous supposerons $a \in \mathbb{R}_+^*$. On posera $x(t) = e^{at}\cos t$ et $y(t) = e^{at}\sin t$.

1. Dessiner la spirale logarithmique. Pour vous guider, répondez aux questions suivantes :
   1.1 Calculer les valeurs de t pour lesquelles $x(t) = 0$. Résoudre la même question pour y.
   1.2 Déterminer les valeurs de $x'(t)$ et de $y'(t)$ aux valeurs de t trouvées dans le point précédent.
   1.3 Déterminer les valeurs de t pour lesquelles $x'(t) = 0$. Même question pour $y'(t) = 0$.
2. Calculer la longueur de la courbe entre $\vec{\ell}(0)$ et $\vec{\ell}(t)$.
3. Montrer que $\vec{\ell}(t) \mapsto (0,0)$ quand $t \mapsto -\infty$.
4. Montrer que la longueur de la courbe entre $\vec{\ell}(0)$ et $\vec{\ell}(t)$ a une limite finie quand $t \mapsto -\infty$.

Exercice 2 On considère la cycloïde paramétrée par $\vec{\ell}(t) = \big(t - \sin(t), 1 - \cos(t)\big)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Calculer la longueur de la courbe entre $\vec{\ell}(0)$ et $\vec{\ell}(2\pi)$.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer les intégrales $\int_{\mathcal{C}} f \,\mathrm{d}s$ dans les cas suivants :

1. $f(x,y) = x^2 + y^3$ et $\mathcal{C}$ est le bord du triangle de sommets $(0,0), (1,0)$ et $(0,1)$,
2. $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $(1,1)$ et de rayon 2.
3. $f(x,y) = xy$ et $\mathcal{C}$ est le quart d'ellipse d'équation $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ situé dans le quart de plan $\{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$.

Exercice 4 Calculer les intégrales curvilignes $\int_{\mathcal{C}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$ dans les suivants, en parcourant toujours les chemins dans le sens positif, c'est-à-dire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre :

1. $\vec{V}(x,y) = xy^2\ \vec{e}_1 + 2xy\ \vec{e}_2$ et $\mathcal{C}$ est le bord du triangle de sommets $(0,0), (1,0)$ et $(0,1)$,
2. $\vec{V}(x,y) = (y + xy)\ \vec{e}_1$ et $\mathcal{C}$ est la courbe définie par le graphe de la parabole $y = x^2$ et la portion de la droite $y = x$ avec $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Exercice 5 a) Soit $\vec{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs défini pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\vec{V}(x,y) = 2xy\ \vec{e}_1 + (x^2 + y^2)\ \vec{e}_2\ .$$

Calculer l'intégrale de ce champ de vecteurs le long des courbes orientées suivantes :

1. Le segment orienté d'origine $(0,0)$ et d'extrémité $(1,1)$,
2. Le graphe de la parabole d'équation $y = x^2$, du point $(0,0)$ au point $(1,1)$.

Quelle conjecture en déduisez-vous ? Démontrer votre affirmation.

b) Refaire la même démarche avec les champs suivants :

1. $\vec{V}(x,y) = y\ \vec{e}_1 + x\ \vec{e}_2$,
2. $\vec{V}(x,y) = (3x^2y + 2x + y^3)\ \vec{e}_1 + (x^3 + 3xy^2 - 2y)\ \vec{e}_2$,
3. $\vec{V}(x,y) = \cos(x)\ \vec{e}_1 + \sin(y)\ \vec{e}_2$,
4. $\vec{V}(x,y) = (y + \dfrac{1}{x})\ \vec{e}_1 + (x + \dfrac{1}{y})\ \vec{e}_2$,
5. $\vec{V}(x,y) = (x + y)\ \vec{e}_1 + (x - y)\ \vec{e}_2$.