Université Claude Bernard Lyon 1 — PCSI UE Math2
Printemps 2013 — Responsable : Johannes Kellendonk

FICHE TD 6 - INTEGRALES MULTIPLES

Exercice 1 Calculer l'intégrale multiple

$$\int_D xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

avec $D = [0,1] \times [0,1]$.

Exercice 2 Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par les courbes d'équation $y = x$ et $y^2 = x$.

Exercice 3 a) Calculer $\int_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, où D est la partie du plan délimitée par les droites d'équation :

$$x = 0, \quad y = x+2, \quad y = -x.$$

b) Calculer la même intégrale au moyen du changement de variables défini par :

$$u = x+y, \qquad v = x-y.$$

Exercice 4 Soit D le quart de disque unité défini par :

$$D = \big\{(x,y) \mid 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x^2+y^2 \leq 1\big\}.$$

Utiliser le passage en coordonnées polaires pour calculer l'intégrale :

$$\int_D (4 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Exercice 5 Déterminer le centre de gravité d'un demi-disque homogène de rayon 1.

Exercice 6 Déterminer le centre de gravité de la surface plane homogène délimitée par la parabole d'équation $y = 6x - x^2$ et la droite d'équation $y = x$.

Exercice 7 Calculer la masse totale du cube $D = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ de $\mathbb{R}^3$ ayant une densité volumique μ donnée par $\mu(x,y,z) = x^2y + xz^2$.

Exercice 8 Calculer le volume de la boule B de rayon 1 de $\mathbb{R}^3$, en partant de l'intégrale

$$\int_B 1\,\mathrm{d}^3\vec{x}$$

et en utilisant les coordonnées sphériques.

Exercice 9 Calculer le volume du domaine D défini par l'intersection d'une sphère de rayon $R > 0$ et d'un cylindre de révolution de rayon $R' > 0$, avec $R' < R$, ayant pour axe un diamètre de la sphère.