FICHE TD 5 - CHAMPS DE VECTEURS

Exercice 1 On considère les applications $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ suffisamment différentiables sur $\mathbb{R}^3$. Démontrer les relations suivantes :

(a) $\vec{\nabla} \cdot (f\,\vec{F}) = f\,\vec{\nabla} \cdot \vec{F} + (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{F}$,

(b) $\vec{\nabla} \cdot \big(\vec{\nabla} \times \vec{F}\big) = 0$,

(c) $\vec{\nabla} \times \big(\vec{\nabla} \times \vec{F}\big) = \vec{\nabla}\big(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\big) - \Delta \vec{F}$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ de classe $C^2\big(\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\big)$ et soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[$ la transformation de coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires donnée pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $\phi(x, y) = (r, \theta)$, avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ si $x > 0, y \geq 0$, $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi$ si $x > 0, y < 0$, $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$ si $x < 0$, $\theta = \pi/2$ si $x = 0, y > 0$ et $\theta = 3\pi/2$ si $x = 0, y < 0$. Déterminer le Laplacien en coordonnées polaires, c'est-à-dire, calculer l'opérateur Δ_{pol} satisfaisant

$$(\Delta_{\text{pol}} f) \circ \phi = \Delta(f \circ \phi)\ .$$

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et posons $F(x, y) = f\big(\sqrt{x^2 + y^2}\big)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

1. Vérifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
2. Calculer $\Delta F(x, y)$ en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
3. Déterminer toutes les fonctions f telles que $\Delta F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercice 4 (Changement de coordonnées et repères mobiles)

1. Déterminer le repère mobile $\{\vec{e}_r(r, \theta, \varphi), \vec{e}_\theta(r, \theta, \varphi), \vec{e}_\varphi(r, \theta, \varphi)\}$ associé aux coordonnées sphériques de $\mathbb{R}^3$.
2. Exprimer le champs vectoriel $\vec{V}(\vec{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\ \vec{e}_3 - \frac{x_1 x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\ \vec{e}_1 - \frac{x_1 x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\ \vec{e}_2$ en coordonnées sphériques.

Exercice 5 Représenter graphiquement des champs vectoriels définis sur $\mathbb{R}^2$ par :

1. $\vec{V}(x, y) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$,
2. $\vec{V}(x, y) = x\ \vec{e}_1 + y\ \vec{e}_2$,
3. $\vec{V}(\rho, \theta) = \rho\ \vec{e}_\theta$,
4. $\vec{V}(\rho, \theta) = \vec{e}_\rho + \rho\ \vec{e}_\theta$.

Même question pour les champs vectoriels définis sur $\mathbb{R}^3$ par

1. $\vec{V}(x, y, z) = x\ \vec{e}_1 + 2\ \vec{e}_2 + \vec{e}_3$,
2. $\vec{V}(r, \theta, \varphi) = r\ \vec{e}_\theta + r\ \vec{e}_\varphi$.

Exercice 6 a) Pour quelle fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la divergence de $\vec{V}(x,y,z) = xz\ \vec{e}_1 + y\ \vec{e}_2 + f(z)\ \vec{e}_3$ est-elle égale à z ?
b) Pour quelle fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a-t-on $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ pour les champs de vecteurs $\vec{V}$ suivants :

1. $\vec{V}(x,y,z) = xz\ \vec{e}_1 + y\ \vec{e}_2 + (f(z) - z^2/2)\ \vec{e}_3$
2. $\vec{V}(x,y,z) = xf(y)\ \vec{e}_1 - f(y)\ \vec{e}_2$
3. $\vec{V}(x,y,z) = xf(x)\ \vec{e}_1 - y\ \vec{e}_2 - zf(x)\ \vec{e}_3$

Exercice 7 Pour les champs de vecteurs $\vec{B}$ mentionnés ci-dessous, déterminer $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ et $\vec{\nabla} \times \vec{B}$:

1. $\vec{B}(x,y,z) = xy^2\ \vec{e}_1 + 2x^2yz\ \vec{e}_2 + 3yz^2\ \vec{e}_3$
2. $\vec{B}(x,y,z) = \mathrm{sh}(xyz)\ \vec{e}_1 + \mathrm{ch}(xyz)\ \vec{e}_2$
3. $\vec{B}(x,y,z) = yz\ \vec{e}_1 + xz\ \vec{e}_2 + xy\ \vec{e}_3$
4. $\vec{B}(x,y,z) = xyz\ \vec{e}_1$

Exercice 8 Déterminer si les champs suivants sont des champs de gradients, et si oui, déterminer leurs potentiels scalaires :

1. $\vec{V}(x,y) = y\ \vec{e}_1 + x\ \vec{e}_2$,
2. $\vec{V}(x,y) = (3x^2y + 2x + y^3)\ \vec{e}_1 + (x^3 + 3xy^2 - 2y)\ \vec{e}_2$,
3. $\vec{V}(x,y) = \cos(x)\ \vec{e}_1 + \sin(y)\ \vec{e}_2$,
4. $\vec{V}(x,y) = (y + \frac{1}{x})\ \vec{e}_1 + (x + \frac{1}{y})\ \vec{e}_2$,
5. $\vec{V}(x,y) = (x+y)\ \vec{e}_1 + (x-y)\ \vec{e}_2$,
6. $\vec{V}(x,y,z) = (x^2 - yz)\ \vec{e}_1 + (y^2 - zx)\ \vec{e}_2 + (z^2 - xy)\ \vec{e}_3$.

Exercice 9 Un champ central dans $\mathbb{R}^3$ est défini par une application $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de la forme $\vec{V}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}$, où $\vec{r} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'un champ central est toujours un champ de gradient et calculer le potentiel dont il est issu.