FICHE TD 4 - CALCUL DIFFÉRENTIEL III

Exercice 1 Règle de la chaine
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, et $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction également différentiable. Montrer que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ on a

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f\big(\phi(x)\big) = \sum_{k=1}^{n} \big[\partial_k f\big]\big(\phi(x)\big)\ \big[\partial_j \phi_k\big](x).$$

Particulariser le résultat pour $n = 2$ et $n = 3$.

Exercice 2 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = e^{x^2+xy+y^2}$. Déterminer la série de Taylor à l'ordre 2 au voisinage du point $(0, 0)$.

Exercice 3 Donner la partie principale du développement de Taylor à l'ordre 2 en $(0, 0)$ pour les fonctions $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, avec $(0, 0) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, définies pour $(x, y) \in \mathcal{D}$ par :

$$\text{a)}\quad f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}, \qquad\qquad \text{b)}\quad f(x, y) = \frac{e^{\cos(x+y)}}{2 + y}.$$

Exercice 4 On définit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 2x^2 + 2$.

1. Vérifier que si D est une droite passant par $(0, 0)$, la restriction de f à D possède un maximum local à l'origine.
2. Etablir si $(0, 0)$ est un point de maximum local.

Exercice 5 Pour chacune des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes, trouver et étudier les points critiques. La fonction admet-elle des extrema locaux et des extrema globaux ?

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$ b) $f(x, y) = xe^y + ye^x$
c) $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$ d) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$
e) $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^3$.

Exercice 6 Soit C l'ensemble des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ et $x + y + z = 1$. Déterminer les points de C pour lesquels la distance à l'origine est minimale.