FICHE TD 3 - CALCUL DIFFÉRENTIEL II

Exercice 1 (Différentielle)
Pour chacune des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\text{a)} \quad f(x, y) = x^3y + x^2y^2 + xy^3, \qquad \text{b)} \quad f(x, y) = x\sin(y) - y\sin(x),$$

déterminer la différentielle en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer la différentielle des fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $u(x) = f(x, -x)$ et $g(x, y) = f(y, x)$.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et posons $g(x, y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

Exercice 4 Déterminer de deux manières diférentes la dérivée par rapport à t de

a) $f(x, y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ où $x = \sin t$ et $y = \cos t$,

b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ où $x = e^{-t}$ et $y = e^t$.

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Posons $z(x) = f(x, y(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que z est dérivable et calculer $z'(x)$ en fonction des dérivées de f et de y. Appliquer la formule au cas particulier défini par $f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2$ et $y(x) = e^{3x}$.

Exercice 6 Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^2$ (une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$). Soit $f(x, y) = e^{xy}$. En sachant que $\gamma(0) = (1, 2)$, et $\gamma'(0) = (3, 4)$. Trouver la valeur de $\left.\dfrac{df(\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0}$.

Exercice 7 (Matrice Hessienne)
Calculer la matrice Hessienne au point (x, y) des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\text{a)} \quad f(x, y) = x^3y + x^2y^2 + xy^3, \qquad \text{b)} \quad f(x, y) = x\sin(y) - y\sin(x)$$

Exercice 8 (Equation d'onde)
Soient F et G deux fonctions de classe C^2 dans $\mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}^*$. On pose $u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$. Montrer que u est une solution de l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \qquad \text{pour tout } (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$