FICHE TD 2 - CALCUL DIFFÉRENTIEL I

Exercice 1 (Dérivées partielles)
Calculer les dérivées partielles premières des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

a) $f(x,y) = xy^2$, b) $f(x,y) = 3xy + e^y$, c) $f(x,y) = y\sin(2xy+1)$,
d) $f(x,y) = e^{\sin(2x)+xy}$, e) $f(x,y) = \sqrt{x^2+\cos y+1}$, f) $f(x,y) = \ln(x^2y^2)$.

Exercice 2 (Gradient)
Calculer le gradient des fonctions de l'Exercice 1 aux points suivants :

a) $(0,0)$, b) $(1,-1)$, c) $(2,1)$.

Exercice 3 (Dérivée directionnelle)
Trouver la dérivée directionnelle de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy^2$ au point $(2,1)$ le long des vecteurs suivants :

a) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, b) $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$, c) $\vec{w} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

Rappel : $\vec{i} = (1,0), \vec{j} = (0,1)$.

Exercice 4 On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f au point $(0,0)$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
3. Montrer que f admet en $(0,0)$ des dérivées dans toutes les directions.
4. Montrer que f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 6 (Interpretation géométrique du gradient)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^2 + 4y^2$.

1. Calculer le gradient de f au point (x,y).
2. Pour tout $k \geq 0$, décrire la ligne de niveau L_k de f.
3. Posons $k := f(x_o,y_o)$, est-ce que le gradient de f en (x_o,y_o) est orthogonal à la courbe de niveau L_k ? Justifier votre réponse, et donner une démonstration pour $y_o \geq 0$ en utilisant la fonction $y = g(x)$ qui a comme graphe une partie de la courbe L_k.