FICHE TD 1 - FONCTIONS DE PLUSIEURES VARIABLES

Exercice 1 (Changement de coordonnées)

1. Exprimer en coordonnées polaires le point du plan donné en coordonnées cartesiennes par $P=(\sqrt{3},1)$.
2. Exprimer en coordonnées cylindriques et sphériques le point de l'espace donné en coordonnées cartésiennes par $Q=(1,1,1)$.

Exercice 2 (Topologie des ensembles)

Dessiner les sous-ensembles A de $\mathbb{R}^2$, leur intérieur $\mathring{A}$, leur fermeture $\overline{A}$ et leur frontière ∂A, dans les cas suivants :

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \ y>x^2,\ y\leq x+1\right\},$$
$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \ x=y\right\},$$
$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \ x<1, 0<y\leq f(x) \text{ avec } f(x)=0 \text{ si } x\leq 0 \text{ et } f(x)=1 \text{ si } x>0\right\}.$$

Pour chacun d'eux, dire si A est ouvert, fermé, borné ? Justifier vos réponses.

Exercice 3 (Domaine et image)

Trouver le domaine et l'image des fonctions suivantes :

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad g(x,y)=\frac{e^{x+y}}{x-y}, \qquad h(x,y)=\ln(x+y).$$

Exercice 4 (Lignes de niveau)

Soit f une fonction de deux variables, de domaine $\mathcal{D}_f\subset\mathbb{R}^2$. On rappelle que, pour tout $k\in\mathbb{R}$, l'ensemble $L_k=\{(x,y)\in\mathcal{D}_f \text{ tel que } f(x,y)=k\}$ s'appelle *la ligne de niveau* k de la fonction f.

1. Trouver les lignes de niveaux 0, 1, -1, 2 et 3 de la fonction définie par $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ et les représenter graphiquement dans le domaine carré : $x\in[-1,1]$ et $y\in[-1,1]$.
   Même question avec $g(x,y)=x^2+y^2$ et $h(x,y)=\dfrac{2y}{x}$ $(x\neq 0)$.
2. Pour la fonction $f(x,y)=x-y-|x-y|$, tracer les lignes de niveau pour $k\in\mathbb{R}$. Traiter séparément les cas $k=0$, $k>0$ et $k<0$.

Exercice 5 (Fonctions partielles)

Soit f une fonction de $D\subset\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et (a,b) un point intérieur de D. On rappelle que les fonctions à une variable

$$x\mapsto f(x,b) \qquad \text{et} \qquad y\mapsto f(a,y)$$

définies sur un intervalle ouvert contenant respectivement a et b, s'appellent *fonctions partielles* associées à f au point (a,b). Trouver les fonctions partielles aux points $(0,0)$ et $(1,2)$ de

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad g(x,y)=xy, \qquad h(x,y)=x^2y-1.$$

Exercice 6 (Graphe)

Soit $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y)=x^2+4y^2$. Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ les lignes de niveau L_k pour $k\in\{0,1,4,9\}$. Représenter graphiquement la surface $z=x^2+4y^2$.

Exercice 7 (Composées)

Considérons les trois fonctions

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}, \quad f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},$$
$$g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, \quad g(t)=t^4+1,$$
$$h:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2, \quad h(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta).$$

Quelles sont les fonctions composées possibles ? Les calculer.