Corrigé de l'interro du 29 avril 2013

Thomas Letendre

Exercice 1. Les opérateurs que l'on peut appliquer à une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sont : le gradient et le laplacien.
Ceux que l'on peut appliquer à un champ de vecteurs $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sont : la divergence, le rotationnel et le laplacien vectoriel.

Exercice 2.

1. Soit $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de composantes V_x, V_y et V_z, on a :

$$\overrightarrow{\texttt{rot}}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

2. Dans le cas où $\vec{V} : (x,y,z) \mapsto (y,x,0)$, les dérivées partielles qui nous intéressent sont pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial V_x}{\partial y}(x,y,z) = 1, \frac{\partial V_x}{\partial z}(x,y,z) = 0, \frac{\partial V_y}{\partial x}(x,y,z) = 1, \frac{\partial V_y}{\partial z}(x,y,z) = 0, \frac{\partial V_z}{\partial x}(x,y,z) = 0 \text{ et } \frac{\partial V_z}{\partial y}(x,y,z) = 0.$$

   D'où, en appliquant la formule de la question 1 : $\overrightarrow{\texttt{rot}}(\vec{V}) = \vec{0}$.

3. D'après la question 2 $\overrightarrow{\texttt{rot}}(\vec{V}) = \vec{0}$, donc d'après le théorème de Poincaré, $\vec{V}$ est un champ de gradient.

4. Soit $f_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{\texttt{grad}}(f_0) = \vec{V}$. Alors pour tout point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a les relations suivantes.

$$\begin{cases} \frac{\partial f_0}{\partial x}(x,y,z) &= V_x(x,y,z) &= y \\ \frac{\partial f_0}{\partial y}(x,y,z) &= V_y(x,y,z) &= x \\ \frac{\partial f_0}{\partial z}(x,y,z) &= V_z(x,y,z) &= 0 \end{cases}$$

5. D'après la troisième relation de la question 4, $\frac{\partial f_0}{\partial z}$ est nulle en tout point de $\mathbb{R}^3$. Donc f_0 est indépendante de la variable z, ou encore, pour tout x, y, z et $z' \in \mathbb{R}$, $f_0(x,y,z) = f_0(x,y,z')$.

6. Soient x_0, y_0 et $z_0 \in \mathbb{R}$. On a $f_0(x_0,y_0,z_0) = f_0(x_0,y_0,0)$ d'après la question 5. Intégrons la première relation de la question 4 par rapport à la variable x, entre 0 et x_0, pour $y = y_0$ fixé et $z = 0$. On obtient que :

$$f_0(x_0,y_0,0) = f_0(0,y_0,0) + \int_0^{x_0} \frac{\partial f_0}{\partial x}(t,y_0,0)dt = f_0(0,y_0,0) + \int_0^{x_0} y_0 dt = f_0(0,y_0,0) + x_0 y_0.$$

   Définissons $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g : t \mapsto f_0(0,t,0)$. Ce qui précède se réécrit alors sous la forme $f_0(x_0,y_0,z_0) = f_0(x_0,y_0,0) = g(y_0) + x_0 y_0$.
   Les réels x_0, y_0 et z_0 étant quelconques, on en déduit que : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f_0(x,y,z) = xy + g(y)$.

   Remarque. Une autre rédaction pour obtenir l'expression de $f_0(x_0,y_0,0)$ consiste à dire que l'on primitive la première relation de la question 4 par rapport à la variable x, à $y = y_0$ et $z = 0$ fixés. On obtient alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f_0(x,y_0,0) = xy_0 + K_{y_0}$ où $K_{y_0} \in \mathbb{R}$ est la "constante" venant de la primitivation par rapport à x. Comme la primitivation se fait à $y = y_0$ fixé, cette "constante" dépend a priori de y_0. On peut alors définir g par $g : y \mapsto K_y$, ce qui donne l'expression voulue.

7. Dérivons la relation obtenue à la question 6 par rapport à la variable y. On obtient pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $\frac{\partial f_0}{\partial y}(x,y,z) = x + g'(y)$. Utilisant la deuxième relation de la question 4, on obtient $g'(y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Donc g est constante.

8. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{\texttt{grad}}(f) = \vec{V}$. En appliquant à f les résultats des questions 4 à 7, on voit que f est de la forme $(x,y,z) \mapsto xy + C$ pour un certain $C \in \mathbb{R}$, correspondant à la valeur de la fonction constante g des questions 6 et 7.
   Inversement, si f est une fonction de la forme $(x,y,z) \mapsto xy + C$ avec $C \in \mathbb{R}$, alors pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{\texttt{grad}}(f)(x,y,z) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)) = (y,x,0) = \vec{V}(x,y,z)$, ce qui achève la preuve.