Interro de TD - 29 avril 2013

Durée : 20 minutes

Nom : Prénom : n° étudiant :

L'usage de tout document ou appareil électronique (calculatrice, téléphone, ...) est interdit.
Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié par la suite.

Exercice 1 (5 points)**.** Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction et $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel suffisamment réguliers (on ne se préoccupera pas ici des problèmes de régularité). Parmi les opérateurs aux dérivées partielles listés ci-dessous, quels sont ceux que l'on peut appliquer à la fonction f ? Et au champ $\vec{V}$? Répondre en cochant oui ou non dans chacune des cases du tableau. (0,5 points par case)

	$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fonction		$\vec{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ champ vectoriel	
gradient $\left(\vec{\nabla} \text{ ou } \overrightarrow{\texttt{grad}}\right)$	oui ☐	non ☐	oui ☐	non ☐
divergence $\left(\vec{\nabla}\cdot \text{ ou } \texttt{div}\right)$	oui ☐	non ☐	oui ☐	non ☐
rotationnel $\left(\vec{\nabla}\times \text{ ou } \vec{\nabla}\wedge \text{ ou } \overrightarrow{\texttt{rot}}\right)$	oui ☐	non ☐	oui ☐	non ☐
laplacien $\left(\Delta\right)$	oui ☐	non ☐	oui ☐	non ☐
laplacien vectoriel $\left(\vec{\Delta}\right)$	oui ☐	non ☐	oui ☐	non ☐

Exercice 2 (15 points)**.**

1. Rappeler l'expression du rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en fonction des dérivées partielles de ses composantes, notées V_x, V_y et V_z. (2 points)

2. Soit $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel défini par $\vec{V} : (x, y, z) \mapsto (y, x, 0)$. Calculer $\overrightarrow{\texttt{rot}}(\vec{V})$. (3 points)

3. Justifier que $\vec{V}$ est un champ de gradient. (1 point)

4. Soit $f_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction, supposée suffisamment régulière, telle que $\overrightarrow{\texttt{grad}}(f_0) = \vec{V}$. Donner l'expression des dérivées partielles de f_0 en tout point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$. (1 point)

5. En déduire que f_0 ne dépend pas de la variable z. (1 point)

6. Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (que l'on supposera suffisamment régulière) telle que : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f_0(x, y, z) = xy + g(y)$. (3 points)
   Indication : primitiver l'une des équations de la question 4.

7. Montrer que la fonction g est constante. (2 points)
   Indication : dériver l'expression de la question 6

8. Déduire des questions précédentes que les fonctions $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telles que $\overrightarrow{\texttt{grad}}(f) = \vec{V}$ sont les fonctions de la forme $f : (x, y, z) \mapsto xy + C$ avec $C \in \mathbb{R}$ et seulement celles-ci. (2 points)